1. Il Caos

di *Anthony Candiello*
Fisico Teorico

1.1. Introduzione

Le prime analisi dei sistemi con dinamica caotica risalgono agli studi di Henri Poincaré (1890) che osservò la peculiare casualità che emerge da un sistema di soli tre corpi celesti legati dall'attrazione gravitazionale. Il "problema dei tre corpi", successivamente approfondito da George D. Birkhoff (1927), è connesso al fatto che, già in un sistema così semplice, non è possibile prevedere le traiettorie future, mettendo in crisi le fondamenta stesse del determinismo.

La consapevolezza che dietro la semplicità delle leggi fisiche che governano l'interazione puntuale si celi una intrinseca complessità emerge progressivamente dallo studio dei sistemi *non lineari*, ovvero caratterizzati da una relazione polinomiale tra le grandezze fisiche. Uno degli ambiti nei quali questo comportamento è più evidente è sicuramente la fluidodinamica, dove sono i fenomeni di turbolenza che rendono imprevedibile l'evoluzione del moto, materia che induce Andrei N. Kolmogorov (1965) a porre le basi per la *teoria della complessità*.

Le difficoltà computazionali connesse all'analisi dei sistemi complessi ne hanno però rallentato la comprensione fino a che l'introduzione di tecnologie di calcolo non ne ha permesso uno studio sistematico delle possibili evoluzioni dinamiche. È proprio l'utilizzo dei calcolatori che ha permesso ad Edward Lorenz, nel 1961, di evidenziare una serie di *comportamenti caotici* nell'ambito delle simulazioni per le previsioni metereologiche e di scoprire casualmente il peculiare fenomeno noto come l'effetto del "battito delle ali di farfalla", grazie al quale una seppur minima variazione delle condizioni iniziali comporta consistenti modifiche nell'evoluzione dinamica.

Fu il matematico francese René Thom ad anticipare, con la *teoria delle catastrofi* (Thom, 1975), l'importanza che assumono i punti di transizione tra diverse configurazioni di equilibrio, punti che verranno successivamente indicati come *biforcazioni*. Sono quindi emersi altri ambiti che dimostrano un comportamento caotico: nella *cinetica chimica* (Rössler, 1976), nei sistemi gravitazionali (Hénon, 1976), negli ecosistemi biologici (May, 1976), portando a precisare il concetto di *attrattore strano* quale orbita nella quale si viene a posizionare un sistema caotico; l'uso scientifico del termine *caos* risale invece al 1975, in riferimento al lavoro di Li e Yorke nell'analisi di particolari flussi turbolenti.

Seguendo la via indicata da Poincaré, grazie allo studio degli attrattori, si precisa quindi tra i ricercatori la conveniente strategia di *qualitative dynamics*, che pone l'accento sull'analisi dell'evoluzione delle configurazioni. Essa ha la sua più significativa espressione nel *periodic doubling* che mostra la stretta connessione tra progressione al caos ed autosimilarità di forma tra le orbite evolutive del sistema, fenomeno caratteristico dei *frattali*.

Il nome più noto degli studiosi di frattali è sicuramente Benoit Mandelbrot, che per primo ha esplorato, grazie alla potenza di calcolo che si rese allora disponibile, le interessanti figure generate da semplici equazioni quadratiche ricorsivamente reiterate (Mandelbrot, 1983); egli per primo ha aperto le porte su di un mondo arcano, composto da sistemi di complessità geometrica ad ogni scala. Con il tempo si è compresa l'intima affinità dei frattali con le geometrie rilevabili in natura, nelle coste, nelle piante, nei sistemi montani, per giungere quindi alla capacità di generare artificialmente le forme naturali degli *iterated function systems*.

Le *reti neurali* introdotte da Mc Culloch e Pitts nel 1943 si sono dimostrate invece utili strumenti per riconoscere gli schemi complessi in un "processo inverso" a quello che origina caos e frattali: sulla base di input esterni, si inducono delle oscillazioni in una rete di nodi che interagiscono sulla base di semplici regole ed in un fenomeno di *auto-organizzazione* la rete converge e si stabilizza in un insieme di configurazioni stabili, "riconoscendo" determinati *pattern*, secondo un modello derivato dall'analisi biofisica del sistema nervoso.

Allo scopo di comprendere i comportamenti caotici nelle loro condizioni più semplici, è risultato poi conveniente studiare sistemi discreti governati da semplici regole – gli *automi cellulari*. Risalgono all'eclettico scienziato John von Neumann negli anni '50 i primi studi sulle varianti discrete dei fenomeni caotici, ovvero comportamenti di arbitraria complessità generabili da sistemi semplici. Gli automi cellulari, resi noti al grande pubblico dal matematico in-

glese John Conway (Conway, 1970) con il gioco *Life*, sono poi stati estesamente approfonditi da Stephen Wolfram (Wolfram, 1986).

È proprio con un particolare automa cellulare a 29 stati che von Neumann ha dimostrato l'esistenza del *costruttore universale*, un sistema in grado di creare una configurazione voluta sulla base di informazioni codificate. Un tale sistema è alla base della dimostrazione (von Neumann, 1966; Langton, 1984; Nobili e Pesavento, 1996) della capacità di creare sistemi in grado di *autoriprodursi*, secondo un meccanismo del tutto analogo a quello che verrà (successivamente) scoperto da James Watson e Francis Crick nel 1959 per il DNA degli organismi viventi.

Il collegamento tra natura e caos viene quindi a chiarirsi. Le configurazioni frattali, più delle figure geometriche elementari, descrivono al meglio le forme che assumono i sistemi naturali; le equazioni non lineari ad evoluzione caotica, più dei modelli lineari, governano i fenomeni fisici e biologici nei quali siamo immersi. I vegetali evolvono secondo una crescita di tipo frattale; le reti neurali del nostro cervello sono peculiari sistemi complessi auto-organizzanti. Infine, la stessa capacità riproduttiva che caratterizza la vita biologica è correlata all'*universalità algoritmica* espressa dai meccanismi genetici di codificazione.

1.2. Determinismo, ordine e casualità

L'anomalia rappresentata dal caos è l'emergere di *comportamenti casuali* nell'ambito dei sistemi descritti dalla dinamica classica. Uno degli assunti di base del *determinismo* è infatti la capacità di prevedere ogni evoluzione di un sistema una volta conosciute con precisione le condizioni iniziali. I fenomeni caotici rendono invece inattuabile un tale programma a causa della notevole sensibilità del sistema nei confronti delle condizioni iniziali – il famoso "effetto farfalla": un battito d'ali di una farfalla induce una variazione minima delle condizioni iniziali in grado però di tradursi nella variazione delle condizioni meteorologiche a chilometri di distanza.

La casualità intrinseca dei sistemi caotici mette inoltre in discussione il nesso tra *causa* ed *effetto*, che appaiono invece scorrelati nel momento in cui il sistema evolve secondo alcuni schemi caratteristici indipendentemente dalle condizioni iniziali. Nonostante queste difficoltà, l'evoluzione dei sistemi complessi può venire convenientemente analizzata ricercando gli *attrattori* che inducono le orbite nello spazio delle configurazioni a convergere in un'area limitata, in alternativa ad una possibile evoluzione repulsiva.

Si tratta in qualche modo di un risultato voluto, in quanto una "ricetta geometrica" per la generazione del caos prevede un processo nel quale il sistema viene prima *stirato* e poi *ripiegato*, con l'obiettivo di mantenere costante l'area di evoluzione. L'effetto di un tale processo ha due conseguenze: lo stiramento amplifica gli errori, e quindi la *sensibilità* del sistema alle condizioni iniziali; il ripiegamento, invece, impedisce al sistema di *divergere*. In tali condizioni emergono frequentemente gli *attrattori strani*, sintomo del comportamento caotico (cfr Fig. 1.1).

La complessità di tali sistemi si misura sui diversi piani concettuali di analisi: dal punto di vista *matematico* essa è correlata al *numero di operazioni* per risolvere un determinato problema, dal punto di vista *fisico* è invece rilevante la crescente influenza degli *errori iniziali* nell'evoluzione del sistema, infine, in una logica *geometrica*, la complessità di una forma si misura con la *lunghezza* necessaria per una sua completa descrizione.

L'aspetto che rende interessante la *teoria della complessità* riguarda il fatto che è possibile generare comportamenti di auto-organizzazione attraverso la combinazione cooperativa di un gran numero di elementi secondo *regole elementari* di interazione costruttiva. Le strutture più semplici con tale caratteristica sono gli *automi cellulari*, cui in qualche modo corrispondono le *reti neurali*. Le strutture più articolate sono rappresentate invece da completi sistemi fisici dotati di una *dinamica non lineare* nelle interazioni tra le particelle, come i sistemi di fluidodinamica o gli insiemi di asteroidi legati gravitazionalmente.

Fig. 1.1 – Un esempio di dinamica caotica: un *attrattore strano* (sistema di P. De Jong).

La conoscenza dei sistemi complessi ha portato a comprendere che questi sono dominati dai comportamenti collettivi a larga scala *indipendentemente* dalle configurazioni dettagliate di interazione che avvengono a piccola scala. L'evoluzione del sistema dipende dalla forma che assumono gli attrattori, che in qualche modo rappresentano l'*ordine* in questi sistemi *disordinati*.

Vi è in effetti un apparente paradosso: i sistemi fisici tendono verso il massimo disordine, in quanto seguono il secondo principio della termodinamica che prevede evoluzioni ad *entropia crescente*; tuttavia, i sistemi biologici tendono naturalmente a costruire sistemi complessi ordinati. La teoria del caos e lo studio delle non linearità dei sistemi naturali hanno permesso di spiegare questa incongruenza, che è connessa alla presenza di *strutture dissipative*. Nei sistemi aperti possono infatti crearsi nuove forme ordinate, a condizione che flussi di energia e materia le mantengano (Prigogine, 1986). La stessa motivazione spiega l'equivalente fenomeno che è osservato negli automi cellulari: questi sono infatti governati da regole che danno luogo a *processi irreversibili* (Davies, 1989).

Nei prossimi paragrafi andremo ad illustrare qualche significativo esempio di sistema con comportamento caotico, passando per gli automi cellulari ed i frattali per concludere con gli attrattori strani e le loro interessanti proprietà.

Una breve conclusione e la bibliografia concludono il capitolo.

1.3. L'equazione "logistica"

Uno dei sistemi più utili per lo studio dei sistemi caotici nella loro versione più essenziale (e "didattica") ci viene suggerito dallo studio degli *ecosistemi naturali*. La dinamica di crescita delle popolazioni animali in relazione di equilibrio preda/predatore è descritto dalla cosiddetta "mappa logistica", un'equazione differenziale quadratica cui nelle simulazioni corrisponde la reiterazione della semplice formula:

$$y = r\,x\,(\,1 - x\,)\ .$$

È straordinario come una semplice equazione quadratica come questa sia in grado di dimostrare completamente il comportamento caotico caratteristico di sistemi ben più complicati. Il modello, analizzato da Robert May nel 1976, è controllato dalla "parabola rovesciata" che dipende dalla variabile x (la "popolazione") ed è controllata dal parametro r ("fecondità") che ne determina l'altezza (cfr. Fig. 1.2).

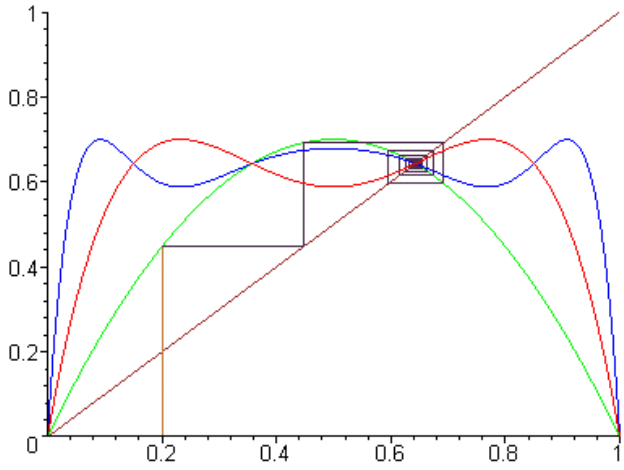

Fig. 1.2 – La parabola che governa la mappa logistica (May, 1976). Sono riportate anche alcune curve ricorsivamente generate di ordine successivo.

La simulazione del sistema prevede la reiterazione ricorsiva dell'equazione logistica; risulta che, in relazione alla variazione del parametro *r* tra 0 e 4 si incontrano i seguenti comportamenti, evidenti nel *diagramma di biforcazione* riportato in Fig. 1.3:

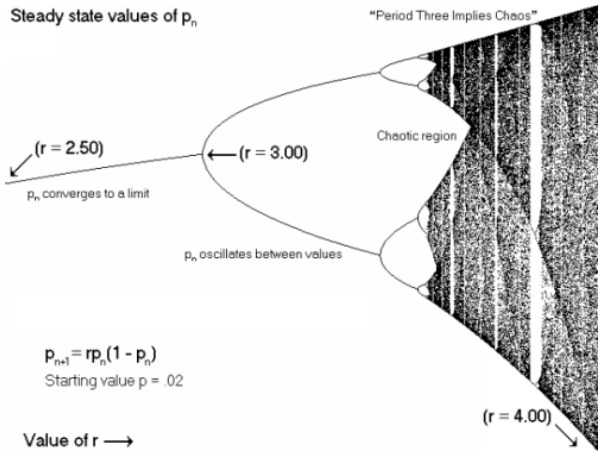

Fig. 1.3 – Il diagramma di biforcazione di transizione dalla periodicità al caos nell'equazione logistica (*fonte*: Bradley L.D., "Chaos & Fractals").

a) *estinzione:* per r tra 0 ed 1, il sistema converge ad $x = 0$ (la popolazione tende a zero);

b) *stabilità:* per valori di r tra 1 e 3, il sistema converge ad un valore unico;

c) *oscillazione:* per valori di r superiori a 3, il sistema inizia ad oscillare su due distinti valori esibendo un *ciclo-limite* di dimensione 2. Incrementando ancora il parametro, scatta una successiva transizione che porta il sistema ad oscillare su quattro valori. Poi su otto, sedici … , in un fenomeno noto come *period doubling*;

d) *caos:* per valori di r superiori a circa 3.56994 ed inferiori a 4, il sistema diviene caotico e genera valori casuali. È da notare che in questo caos sopravvivono alcuni sistemi periodici: tra 3.8284 e 3.8415 il sistema oscilla su tre valori (Li e Yorke, 1975; Gordon, 1996).

Il peculiare comportamento di transizione dalla periodicità al caos presenta alcune ulteriori caratteristiche interessanti. In particolare, si osserva una specifica autosimilarità nelle mappe di biforcazione che fu quantificata da Feigenbaum nel 1975 (vedi Fig. 1.4).

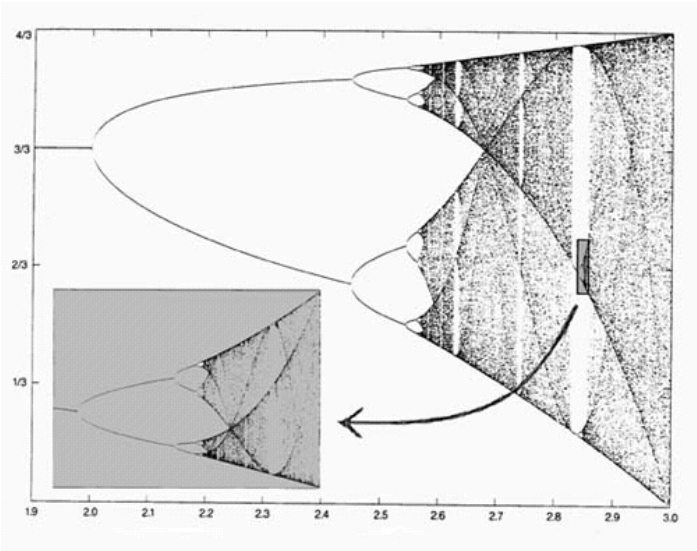

Fig. 1.4 - Autosimiliarità della mappa logistica: il diagramma di biforcazione è un *frattale* (vedasi: Feigenbaum, 1978).

Il rapporto tra gli intervalli nei quali avviene il raddoppio dei punti di oscillazione è una *costante*, pari a circa 4,6692. Risulta che la costante di Feigenbaum è una costante *universale* che caratterizza tutte le mappe unidimensionali che generano il caos con il meccanismo di raddoppiamento delle oscillazioni periodiche visto nella mappa logistica (Lanford, 1982; Epstein, 1985).

1.4. Dal caos ai frattali

Studiando i sistemi non lineari si giunge quindi naturalmente ai *frattali*, sistemi geometrici che hanno corrispondenze di auto-similarità a qualunque scala. I frattali sono noti da molto tempo ai matematici, che negli anni hanno identificato diversi sistemi geometrici dotati di tale proprietà.

L'insieme costituito dalla "polvere" di Cantor (1872) è costruito ricorsivamente dividendo in tre ciascuna linea ed eliminandone la parte centrale. Il sistema risultante (vedi Fig. 1.5) è caratterizzato da una *lunghezza* pari a zero, segnale che la *dimensione* dell'insieme si è ridotta ad un valore inferiore ad uno; precisamente, essa risulta essere pari a $log3 / log2 = 0.63$ circa, secondo un modello di misura introdotto da Hausdorff nel 1919.

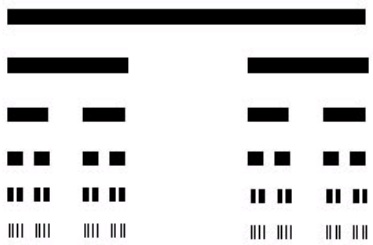

Fig. 1.5 - L'insieme di Cantor (1872).

La curva di Peano che riempie il piano è invece del 1891, seguito da Hilbert (1891), che costruì simili curve a dimensione fratta.

Von Koch costruisce nel 1904 il famoso "fiocco di neve" con una semplice procedura ricorsiva che prevede la sostituzione del terzo centrale di ogni segmento con due segmenti di pari lunghezza (vedasi la Fig. 1.6). Il rapporto $log 4 / log 3 = 1,26$ circa ci fornisce la dimensione frattale, intermedia tra una e due dimensioni: in questo caso l'*area* è zero, ma il *perimetro* della curva è infinito.

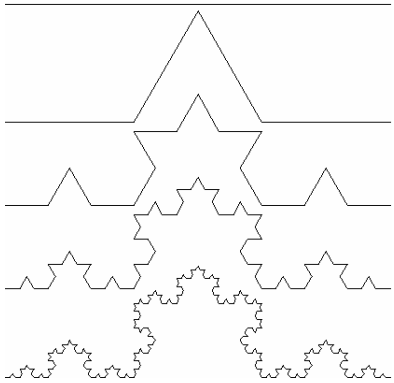

Fig. 1.6 – La generazione del “fiocco di neve” di Koch (1904).

Un altro caso interessante caratterizzato da una regola semplice e di evidente auto-similarità ad ogni scala è il frattale a triangolo che Sierpenski costruisce nel 1915 (vedasi Fig. 1.7).

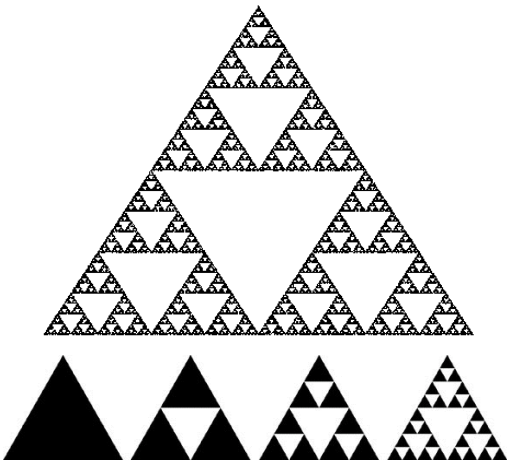

Fig. 1.7 – Un esempio di frattale: il triangolo di Sierpenski (1915).

La somiglianza dei frattali alle forme naturali, montagne, coste, piante, nuvole ha suggerito la costruzione di sistemi iterativi in grado di simulare efficacemente la geometria che caratterizza il mondo che ci circonda. La famiglia di frattali che più si avvicina a questo obiettivo è quella degli *iterated function systems* (IFS), basati su iterazioni ricorsive di opportune combinazioni di trasformazioni affini (cfr. Fig. 1.8). Tali sistemi, oltre alle evidenti ricadute nei sistemi per la generazione di scenari naturali, trovano applicazione per le notevoli potenzialità dimostrate nella compressione delle immagini (Barnsley e Sloan, 1988).

Fig. 1.8 – Un *iterated function system* che riproduce una forma simile ad un vegetale.

La notorietà dei frattali è però collegata alla popolarità dei risultati ottenuti da Benoit Mandelbrot, scienziato attivo negli Stati Uniti ma di origine e studi europei. Discepolo di G. M. Julia dell'Ecole Polytechnique di Parigi, da questi apprende le potenzialità dell'equazione quadratica nello spazio dei numeri complessi per la generazione di configurazioni interessanti (Mandelbrot, 1983):

$$f(z) = z^2 + c \ ,$$

dove c è una *costante* complessa $c = a + i\,b$, e z è una *variabile* nello spazio dei numeri complessi, $z = x + i\,y$.

Si noti che le variabili complesse individuano naturalmente un *punto* di coordinate $z = (\,x\,,\,y\,)$ nel piano bidimensionale. Separando i punti corrispondenti alle costanti c per i quali l'equazione converge si ottiene l'*insieme di Mandelbrot*, il cui confine ha proprietà frattali (cfr. Fig. 1.9).

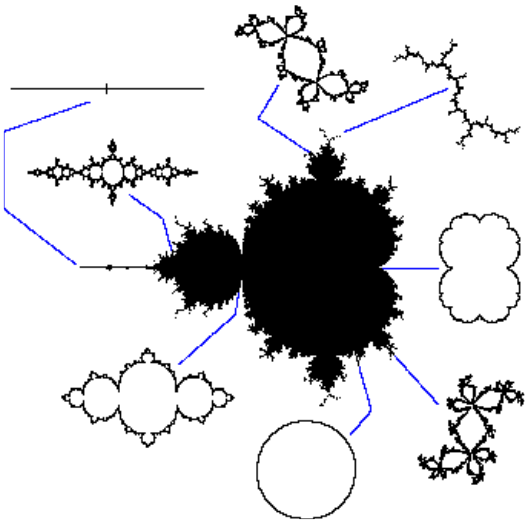

Fig. 1.9 – Il frattale che emerge dall'*insieme di Mandelbrot* (Mandelbrot, 1983).

1.5. Gli attrattori strani

L'evoluzione dei sistemi dinamici complessi sfugge al controllo *quantitativo* richiesto dal determinismo, per l'emergere della casualità connessa ai fenomeni caotici; ciò non significa tuttavia che non sia possibile fare delle previsioni *qualitative*, che rappresentano uno dei successi della teoria del caos.

L'attrattore è il luogo verso il quale *converge* lo spazio delle configurazioni di un sistema dinamico; a fronte di lievi perturbazioni delle condizioni l'attrattore mantiene vicine le traiettorie finali del sistema. Un attrattore scala in complessità dal semplice punto fisso, alle configurazioni composte da un insieme limitato di stati nei quali il sistema oscilla, a strutture geometriche a dimensione intera, fino al caso dell'attrattore strano, che ha *struttura frattale*.

Le complicate equazioni differenziali non lineari inizialmente affrontate da Edward N. Lorenz nel 1963 avevano l'obiettivo di prevedere l'evoluzione meteorologica. In un tentativo di semplificazione, egli passò a studiare la sola convezione dei fluidi – specificatamente l'evoluzione di un gas in una scatola rettangolare perturbato da una fonte di calore. Il sistema è governato da una opportuna specializzazione delle equazioni di Navier-Stokes, che si traduce nel sistema di tre equazioni differenziali non lineari accoppiate:

$$dx / dt = P (y - z)$$
$$dy / dt = R x - y - x z$$
$$dz / dt = x y - B y ,$$

dove *P* misura il rapporto tra viscosità e conduttività termica del fluido, *R* esprime la differenza di temperature tra alto e basso e *B* è un fattore che definisce la geometria del sistema. Lorenz usa i valori P = 10, R = 28, B = 8/3 e simulando le equazioni con un calcolatore individua un complicato comportamento dinamico, riportato in Fig. 1.10.

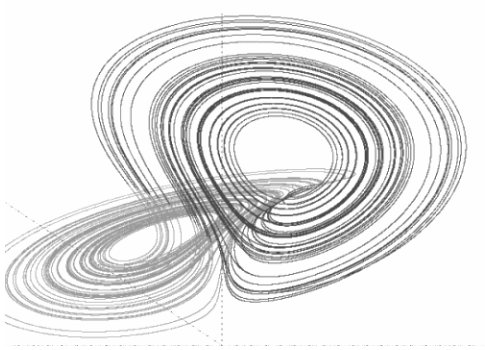

Fig. 1.10 – L'attrattore strano di Lorenz dei sistemi convettivi (Lorenz, 1963).

Per una pura casualità (Lorenz riprese una simulazione ricopiando a mano alcuni valori, eliminando accidentalmente alcune cifre decimali), Lorenz si accorse dell'estrema sensibilità dell'evoluzione in relazione alle condizioni iniziali (evidente in Fig. 1.11).

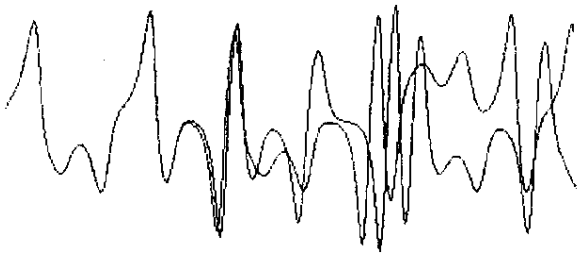

Fig. 1.11 – Sensibilità dalle condizioni iniziali sperimentate da Lorenz (fonte: Stewart 1989).

L'attrattore individua infatti l'*area* nella quale si troverà il sistema, ma essendo l'attrattore *strano* è impossibile prevedere esattamente *in quale punto* questo potrà trovarsi. L'evoluzione ha peculiari caratteristiche di *caoticità* che potrà allontanare due punti inizialmente molto vicini e di *casualità* che portano il sistema a non ripetersi mai allo stesso modo.

Analogo a quello di Lorenz è l'attrattore strano individuato da Rössler nel 1975, visibile in Fig. 1.12 come proiezione bidimensionale.

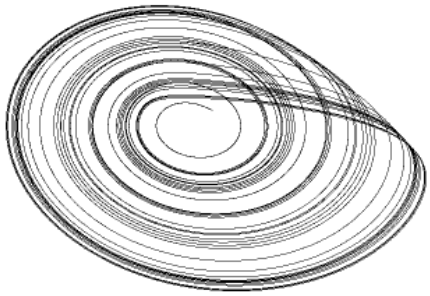

Fig. 1.12 – L'attrattore di Rössler delle reazioni chimiche (Rössler, 1975) generato con i valori $A = B = 0{,}2$ $C = 5{,}7$.

L'attrattore è caratteristico di un sistema di equazioni differenziali non lineari derivate dalle equazioni di Navier-Stokes che descrivono in questo caso la *cinematica delle reazioni chimiche*:

$$dx / dt = - (y + z)$$
$$dy / dt = x + A\, y$$
$$dz / dt = B + x\, z - C\, z\ .$$

Fu invece Michel Hénon, dell'Osservatorio di Nizza, ad osservare l'emergere di fenomeni caotici nelle orbite collettive degli oggetti celesti in certe condizioni, individuando un peculiare attrattore strano (cfr. Fig. 1.13) generato dalle due equazioni seguenti:

$$x_{n+1} = 1 + y_n - a\, x_n^2$$
$$y_{n+1} = b\, x_n\ .$$

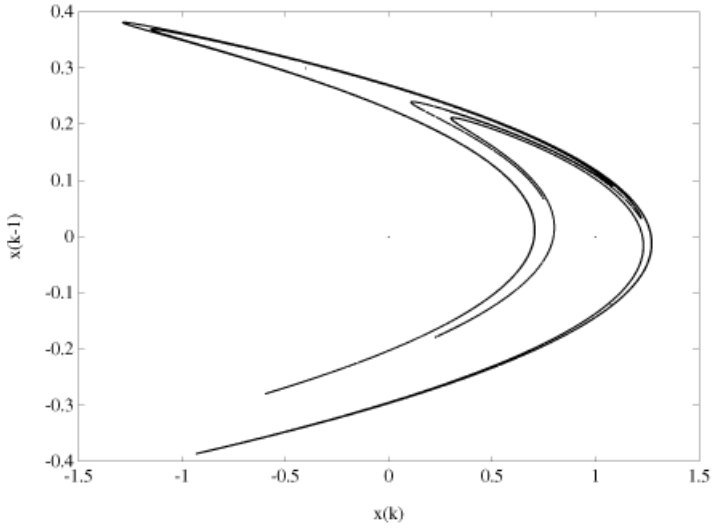

Fig. 1.13 - L'attrattore di Hénon (1976).

1.6. Dal caos all'universalità algoritmica

Le particolari condizioni nelle quali emerge il caos nei sistemi dinamici sono strettamente connesse ad un processo sensibile a *minime variazioni* delle traiettorie. Un tale processo mette in qualche modo al suo limite estremo l'*assunto di continuità* dei sistemi analizzati, in quanto vengono ricorsivamente amplificate le imperfezioni a piccola scala. Senza scomodare la meccanica quantistica, che ci segnala la peculiare discretizzazione del mondo fisico a distanze microscopiche, è evidente la difficoltà insita nelle elaborazioni di tali sistemi, che richiederebbero una *precisione infinita*. Il *caos deterministico* sulla base di una tale lettura appare quasi un artefatto dovuto alle imperfette modalità di calcolo, che sia simulato nei calcolatori o "agito" dai sistemi naturali.

Una strategia di superamento di tali anomalie suggerisce di rivolgersi ai *sistemi discreti* e di ricercare in tale ambito, privo di difetti di approssimazione, le situazioni corrispondenti ai comportamenti caotici. La ricerca di *pattern* evolutivi interessanti nei sistemi a numero finito di stati porta von Neumann (vedi Fig. 1.14) all'ideazione della teoria degli *automi cellulari*; l'*universalità algoritmica* che ne caratterizza alcune configurazioni è proprio il corrispondente discreto dei fenomeni caotici prodotti dai sistemi dinamici continui. Tali

ricerche pongono peraltro le premesse per la definizione dell'architettura dei moderni calcolatori, che tuttora fa capo a quella individuata da von Neumann, suggerendo un inaspettato collegamento tra caos e capacità di elaborazione.

Quescenti		U			
Stati di trasmissione	*Non eccitati*	→	↑	←	↓
	Eccitati	•→	•↑	•←	•↓
Stati speciali di trasmissione	*Non eccitati*	⇨	⇧	⇦	⇩
	Eccitati	•⇨	•⇧	•⇦	•⇩
Confluenti	*Non eccitati*	C_{00}			
	Eccitati		C_{01}	C_{10}	C_{11}
Stati sensitizzati		S_{00}	S_{01}	S_{10}	S_{11}
		S_{theta}	S_0	S_1	S_{000}

Fig. 1.14 – I 29 stati dell'automa cellulare di von Neumann.

Le approfondite analisi di Stephen Wolfram hanno portato ad individuare le classi dei più semplici automi cellulari che si possono costruire (vedasi un esempio, con le regole, in Fig. 1.15), automi che comunque dimostrano spesso un interessante e complicato comportamento, inatteso per sistemi elementari.

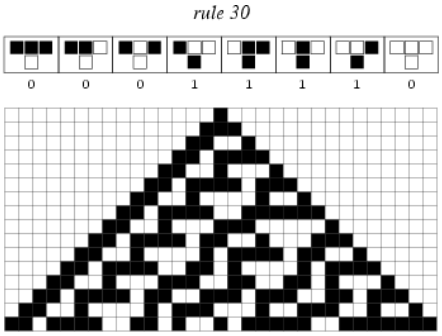

Fig. 1.15 - Un esempio di automa cellulare elementare (fonte: Wolfram Mathworld).

Il gioco *Life* ideato da John Conway e presentato nel 1970 nella rubrica di giochi matematici curata da Martin Gardner su "Scientific American" ha reso popolari gli automi cellulari. Il sistema opera su una griglia bidimensionale e si basa su semplici regole di generazione sulla base degli stati adiacenti, ciò nonostante è in grado di generare comportamenti complessi (vedasi Fig. 1.16).

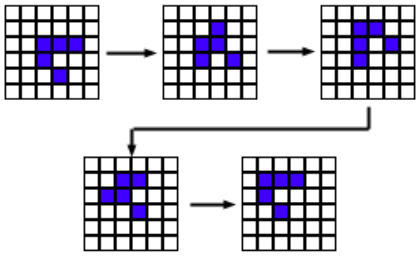

Fig. 1.16 - L'*aliante* in movimento caratteristico del gioco *Life* (Conway, 1970).

Se gli automi cellulari sono il sistema di elezione per analizzare le retroazioni ricorsive nei sistemi discreti, bisogna considerare che il funzionamento degli automi non è dissimile da quello delle reti interagenti (cfr. Fig. 1.17), che possono configurarsi come le reti neurali, strutture che se opportunamente progettate dimostrano la capacità di riconoscere determinati pattern complessi, o come le reti relazionali, se adeguatamente vincolate in specifici modelli a stati finiti, che possono dar luogo a fenomeni di auto-organizzazione.

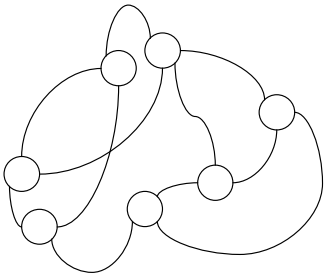

Fig. 1.17 - Una *rete* è in grado di generare comportamenti complessi.

Reti di agenti semplici strettamente accoppiati generano dunque "caos discreto", ovvero possono esprimere evoluzioni complicate; le reti possono es-

sere utilizzate per generare soluzioni a problemi complessi con una strategia che utilizza cooperazione, auto-organizzazione ed evoluzioni adattive. Bisogna però sottolineare che in tali sistemi i comportamenti più interessanti vanno ricercati nell'ambito di una *accurata progettazione*. Non è cioè una strategia conveniente costruire una rete generica ed aspettarsi comportamenti utili senza intervenire in una sorta di programmazione.

Sono gli stessi automi di von Neumann che ci inducono a questa conclusione: il *costruttore universale* (di cui vediamo in Fig. 1.18 la variante del sistema ottimizzato di Nobili e Pesavento) è il risultato di un'accurata individuazione di tutti i componenti necessari per ottenere un tale comportamento, analogamente a quanto avviene nella progettazione dei microprocessori[1].

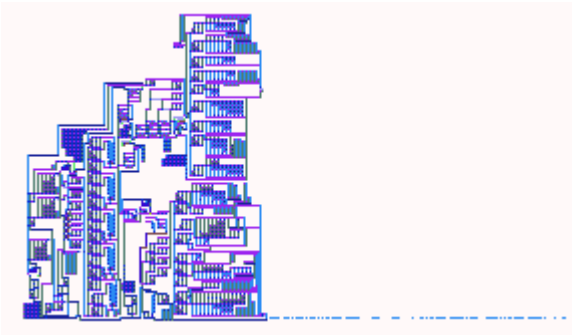

Fig. 1.18 - Il *costruttore universale* in azione, qui riportato nella sua più semplice variante con i *crossing states* (Nobili e Pesavento, 1996).

Il costruttore universale ha consentito a von Neumann di dimostrare formalmente la *capacità riproduttiva dei sistemi artificiali*; il meccanismo si basa sulla codificazione delle informazioni registrate su di un flusso sequenziale di stati registrati nel "mondo" dell'automa, in una forma di evoluzione "tecnologica" del meccanismo astratto alla base del sistema a nastro della macchina di Turing (1936) ed in evidente similarità ai sistemi biologici di lettura delle informazioni genetiche.

Il percorso fin qui seguito ci porta ad alcune considerazioni finali che potranno essere utili per *comprendere* ed in qualche misura *governare* il caos o

[1] Le evoluzioni nell'ottimizzazione dell'automa originale in versioni più adatte ad implementazioni tecnologiche ne suggeriscono peraltro possibili applicazioni per la costruzione di sistemi di calcolo parallelo altamente flessibili e riconfigurabili a piacere.

le sue declinazioni "discrete" (reti ed automi cellulari) negli ambiti nei quali questi fenomeni si possono presentare:

a) nonostante l'intrinseca casualità che caratterizza l'evoluzione *quantitativa* di tali sistemi, ne sono ormai noti alcuni comportamenti *qualitativi*;
b) alla forte *dipendenza puntuale* dalle condizioni iniziali (le orbite nell'attrattore si distanziano) corrisponde per contro l'*indipendenza complessiva* dalle stesse condizioni iniziali (le orbite stanno comunque all'interno degli attrattori);
c) il caos nei sistemi continui è connesso all'impossibilità di fare calcoli con *precisione infinita* nei sistemi reali o simulati;
d) i sistemi discreti, incapaci di errori di misura, traducono il caos nell'*universalità algoritmica*;
e) tale universalità è alla base dei sistemi *informatici*, dei sistemi *biologici* e probabilmente dell'*intelligenza*;
f) i comportamenti "interessanti", quale è ad esempio il costruttore universale in grado di autoriprodursi, non emergono spontaneamente da un sistema generico, ma vanno opportunamente progettati.

Bibliografia

Barnsely, Devaney, Mandelbrot, Peitgen, Saupe, Voss (1988), *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag.

Barnsley F., Sloan A.D. (1988), "A Better Way to Compress Images", *Byte Magazine*, January, pages 215-222.

Birkhoff, G.D. (1927) "On the periodic motion of dynamical systems", *Acta Mathematica* 50, 359-379.

Bischi G. I., Carini R., Gardini L., Tenti P. (2004), *Sulle orme del caos. Comportamenti complessi in modelli matematici semplici*, Bruno Mondadori.

Bourke, P. (1993), "Fractals, Chaos", su *astronomy.swin.edu.au/~pbourke/fractals*.

Cantor, G. (1882), "Grundlagen Einer Allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre", *Mathematische Annalen*, 21, p545-591.

Chialvo D.R, Gilmour R.F., Jalife J. (1990), "Low dimensional chaos in cardiac tissue", Nature 343, 653.

Codd E. F. (1968), *Cellular Automata*, Academic Press, New York.

Conway J.H. (1970), "The game of life", apparso nella rubrica di Martin Gardner, *Mathematical recreations*, su *Scientific American*, ottobre.

Davies P. (1989), *Il Cosmo intelligente*, Mondadori, Milano.

Epstein H. (1986), “New proofs of the existence of the Feigenbaum functions”, *Commun. Math. Phys.* 106, 395-426; MR 88i:58124.

Feigenbaum M. J. (1980), “Universal behavior in nonlinear systems”, *Los Alamos Science* 1,1.

Feigenbaum, M. J. (1978), “Quantitative Universality for a Class of Non-Linear Transformations.” *J. Stat. Phys.* 19, 25-52.

Gleick J. (1989), *Caos - La nascita di una nuova scienza*, Biblioteca Universale Rizzoli.

Gordon, W. B. (1996), “Period Three Trajectories of the Logistic Map.” *Math. Mag*. 69, 118-120.

Grassberger P. and Procaccia I. (1983), “Measuring the strangeness of strange attractors”, *Physica* “9D”: 189-208.

Hao, B.-L. (1990), *Chaos II*, Singapore: World Scientific.

Hénon M. (1976). “A two-dimensional mapping with a strange attractor”, *Communications in Mathematical Physics* “50”, 69–77.

Hilbert, D. (1891) “Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flachenstück”, *Math. Ann.* 38, 459-460.

Kolmogorov, A. N. (1965), “Three approaches to the quantitative definition of information”, *Prob. Info. Trans.*, 1(1): 1-7.

Lanford O.E. (1982), “A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures”, *Bull. Amer. Math. Soc.* 6, 427-434; MR 83g:58051.

Langton C. (1989), *Artificial Life*, Addison-Wesley.

Langton C.G. (1984). “Self-Reproduction in Cellular Automata”, *Physica D*, 10, pp. 135-144.

Li, T. Y., Yorke, J. A. (1975), “Period Three Implies Chaos”, *Amer. Math. Monthly* 82, 985-992.

Lorenz E. N. (1963), “Deterministic Nonperiodic Flow”, *J. Atmos. Sc.* 20, 130.

Mandelbrot B.. (1982), *The Fractal Geometry of Nature*, W.H.Freeman & Co, NY.

May R.M. (1976), “Simple mathematical models with very complicated dynamics”, *Nature* 261, 459.

McCulloch W.S., Pitts W.H. (1943), “A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity”, *Bullettin of Mathematical Biophysics*, vol. 5, p. 115, 1943.

Nobili, R., Pesavento, U. (1996), “Generalised von Neumann's Automata I: a Revisitation”, su *Artificial Worlds and Urban Studies*, Besussi E., Cecchini A. (Eds.), DAEST Publication, Convegni 1, Venezia.

Ott E. (1993), *Chaos in Dynamical systems*, Cambridge University Press.

Ott E. (1993), “Quantum Chaos.” Ch. 10 in *Chaos in Dynamical Systems*, New York, Cambridge University Press, pp. 334-362.

Pesavento, U. (1995) “An implementation of von Neumann's self-reproducing machine”, *Artificial Life* 2(4):337-354.

Poincaré H. (1890), "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique", *Acta Mathematica* 13, 1-270.

Prigogine I. (1986), *Dall'essere al divenire. Tempo e complessità nelle scienze fisiche*, Einaudi, Torino.

Prigogine I., Glansdorff P. (1971), *Thermodinamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*, Wiley, New York.

Prigogine I., Stengers I. (1984), *Order out of Chaos*, Bantam, New York 1984.

Prusinkiewicz, P., Lindenmayer A. (1990), *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer-Verlag.

Rössler, O. E. (1976), "An equation for continuous chaos", *Phys. Lett.* 35A:397-398.

Russel D.A., Hanson J.D., Ott E. (1980), "Dimension of strange attractors", *Physical Review Letters* "45": 1175.

Sparrow, C. (1982), *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, Springer-Verlag, New York.

Stewart I. (1989), *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos*, Penguin Books Ltd, Harmondsworth, Middlesex.

Thom R. (1975), *Structural Stability and Morphogenesis*, Benjamin, Reading.

Turing, A. (1936), "On Computable Numbers, With an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, Volume 42.

von Neumann J. (1966), *Theory of Self-Reproducing Automata*, University of Illinois Press, Illinois. Edited and completed by A. W. Burks.

Watson J.D., Crick F.H.C. (1953), "Molecular structure of nucleic acids", *Nature*.

Weisstein, E.W. (2006), *Mathworld* – a Wolfram web resource, mathworld.wolfram.com.

Wiggins, S. (1988), *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*, Springer-Verlag, New York.

Wikipedia contributors (2006). Universal Constructor. *Wikipedia, The Free Encyclopedia.*

Wolfram S. (1984). "Universality and Complexity in Cellular Automata". *Physica D* 10, 1-35.

Wolfram S. (1986), *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Press.

Wolfram S. (2002), *A New Kind of Science*, LLC, Canada.