ANOMALIE E SUPERGRAVITA' EFFETTIVA NELLA STRINGA ETEROTICA DI GREEN-SCHWARZ

Antonio Candiello

TESI PER IL CONSEGUIMENTO DEL
TITOLO DI DOTTORE DI RICERCA IN FISICA

VII Ciclo

Anno Accademico 1993–94

Indice

1 Il modello sigma eterotico di Green-Schwarz ed il relativo background SUGRA-SYM a livello classico **7**

1.1 Il sistema SUGRA-SYM disaccoppiato 7

1.1.1 Scelta dei vincoli 10

1.1.2 Soluzione delle identità di Bianchi 13

1.1.3 Equazioni del moto 18

1.2 Il sistema SUGRA-SYM accoppiato 20

1.3 Il modello sigma eterotico di Green-Schwarz 21

1.3.1 La simmetria fermionica locale κ 23

1.3.2 Equazioni del moto 26

2 Quantizzazione **29**

2.1 Quantizzazione di Batalin-Vilkovisky per algebre aperte: schema generale . 30

2.1.1 Ghosts e variazioni BRST 31

2.1.2 Anticampi, antiparentesi e trasformazioni canoniche 34

2.1.3 Azione estesa e master equation 38

2.1.4 Coomologia BRST 40

2.1.5 Gauge fixing 42

2.1.6 Teorie riducibili 43

2.2 Regolarizzazione e rinormalizzazione 45

2.2.1 Regolarizzazione Dimensionale 47

2.2.2 Rinormalizzazione ad un loop quando la regolarizzazione non rompe le simmetrie presenti a livello classico 50

2.2.3 Rinormalizzazione ad un loop quando la regolarizzazione rompe le simmetrie presenti a livello classico 51
2.3 Background field method e sviluppo in coordinate normali 55
2.3.1 Sviluppo in coordinate normali come trasformazione canonica . . . 56

3 Quantizzazione del modello sigma eterotico di Green-Schwarz 61
3.1 Azione estesa non sviluppata 62
3.1.1 Variazioni BRST e loro nilpotenza on-shell 63
3.1.2 Ricostruzione dell'azione estesa 66
3.2 Analisi coomologica delle possibili anomalie 67
3.2.1 Anomalia A_κ 70
3.2.2 Anomalia A_u 73
3.3 Sviluppo in coordinate normali 74
3.3.1 Gauge fixing 81
3.3.2 Eliminazione del settore quantistico κ 82

4 Calcolo esplicito delle anomalie 87
4.1 L'anomalia di Yang-Mills 89
4.2 L'anomalia κ di Yang-Mills 94
4.3 L'anomalia di Lorentz 96
4.4 L'anomalia κ di Lorentz 101
4.5 Conclusioni 108
4.5.1 Possibili anomalie addizionali 110

A Algebra delle matrici gamma in dieci dimensioni 117

B Calcolo esplicito del grafico anomalo con due campi esterni di gauge 118

Introduzione

Le teorie di superstringa, nate negli anni '70 come teorie delle interazioni forti, rappresentano nella visione attuale teorie che descrivono tutte le interazioni fondamantali, gravità compresa. In tali teorie è superato il concetto di particella puntiforme, che viene sostituito con quello di oggetti estesi unidimensionali immersi nello spazio-tempo, chiamati appunto stringhe.

Le teorie di stringa richiedono per consistenza:

(1) l'introduzione di una nuova simmetria fondamentale, la supersimmetria, che correla bosoni e fermioni;

(2) il passaggio ad uno spazio-tempo a 10 dimensioni.

La teoria di superstringa più promettente dal punto di vista fenomenologico è la superstringa eterotica, che è caratterizzata dalla presenza, già nella teoria dieci-dimensionale, di gradi di libertà di gauge. Tale teoria sarà alla base delle considerazioni trattate nel presente lavoro.

Nella superstringa eterotica il gruppo di gauge non è scelto arbitrariamente ma, come per la dimensione dello spazio-tempo, è vincolato dalla richiesta di consistenza della teoria: il gruppo di gauge può essere $SO(32)$ oppure $E_8 \times E_8$.

Lo spettro delle teorie di stringa è caratterizzato dalla presenza di un numero infinito di eccitazioni che rappresentano le particelle elementari, di massa pari a multipli interi della massa di Planck. Lo spettro a massa nulla delle teorie di superstringa è descritto dalle relative teorie effettive di supergravità, che dunque hanno in questo ambito la loro giustificazione (tali teorie effettive non sono infatti, in generale, rinormalizzabili).

Le teorie di superstringa sono formulate in uno spazio-tempo piatto. Per ottenere le ampiezze nel settore di massa nulla è utile considerare i modelli sigma associati. Tali modelli sono caratterizzati dalla presenza di uno spazio-tempo curvo, e dunque dalla presenza dei campi cosiddetti di background, che dipendono dal punto dello spazio-tempo. Nell'ambito dei modelli sigma le ampiezze sono formalmente ottenute derivando funzionalmente l'azione effettiva rispetto ai campi di background.

Lo spettro a massa nulla della superstringa eterotica è descritto da una teoria di Supergravità-Super-Yang-Mills (SUGRA-SYM) $D = 10$, $N = 1$ e cioè da una teoria di super-

gravità diecidimensionale $N = 1$ accoppiata ad una teoria di Yang-Mills supersimmetrica in $D = 10$ con gruppo di gauge G.

La supergravità (SUGRA) pura [10, 61] e la teoria di super Yang-Mills (SYM) [58] in dieci dimensioni sono note da tempo. L'accoppiamento tra SUGRA e SYM è stato ottenuto da Chapline e Manton [55], estendendo gli analoghi risultati nel settore abeliano [56, 57] grazie all'aggiunta della tre-superforma di Chern-Simons di gauge alla definizione del gravifotone H. L'aggiunta del termine di Chern-Simons di Lorenz è stata suggerita da Green e Schwarz [40] per eliminare le anomalie chirali altrimenti presenti nel modello di Chapline-Manton. Quando anche tale termine è presente nella definizione di H, è infatti possibile la costruzione di un controtermine che cancella le anomalie chirali se il gruppo G è $SO(32)$ o $E_8 \times E_8$. Tale cancellazione va sotto il nome di meccanismo di Green-Schwarz.

Le suddette teorie effettive sono state descritte nelle loro prime formulazioni con la tecnica detta in seguito "per componenti", che coincide con la procedura comunemente in uso per le teorie di campo. Tale procedura non è però la più adatta per teorie supersimmetriche, in particolare per la supergravità. Infatti la supersimmetria non è controllabile con facilità, e le equazioni divengono rapidamente assai complicate, in particolare nel settore fermionico della teoria. Ad esempio, il meccanismo di Green-Schwarz per la cancellazione delle anomalie è stato originariamente descritto solo nel settore bosonico.

La costruzione delle teorie supersimmetriche in cui la supersimmetria è esplicita, si basa sul superspazio, cioè uno spazio-tempo in cui sono presenti anche coordinate fermioniche. In tale costruzione è necessario imporre opportuni vincoli sulle torsioni e sulle curvature (che sono definite nel superspazio) per ridurre la grande quantità di campi ausiliari che la tecnica di superspazio produce naturalmente.

Le trasformazioni di supersimmetria e le equazioni del moto sono allora conseguenza delle identità di Bianchi. In tal modo è stato ricostruito in superspazio il modello di Chapline-Manton [47, 54, 48, 49, 50, 51, 52]. L'ingrediente principale per l'estensione in superspazio del modello SUGRA-SYM con la superforma di Chern-Simons di Lorentz è il teorema di Ref. [36]. Secondo tale risultato, è possibile la decomposizione di $\mathrm{tr}\, R^2$ (R è la curvatura di Lorentz), in modo tale che le identità di Bianchi in superspazio hanno, dopo un'opportuna ridefinizione di H, la stessa struttura che hanno in assenza del termine di Chern-Simons di Lorentz [38].

Vi sono due formulazioni principali delle teorie di superstringa.

La prima formulazione scoperta è quella in cui la supersimmetria è evidente a livello dello spazio interno della stringa, detto worldsheet; tale formulazione, che va sotto il nome di formulazione Neveu-Schwarz-Ramond (NSR), presenta lo svantaggio che la supersimmetria dello spazio-tempo non è esplicita, e per rivelarla è necessaria una particolare proiezione degli stati fisici, evidenziata da Gliozzi, Scherk ed Olive (proiezione GSO).

Nella seconda formulazione, scoperta da Green e Schwarz (GS) [42], la supersimmetria dello spazio-tempo è evidente per costruzione. Nel presente lavoro faremo riferimento a tale seconda formulazione. La formulazione di Green-Schwarz consente, nell'ambito dei modelli sigma, l'accoppiamento con i campi di background dello spazio-tempo curvo direttamente in superspazio.

Caratteristica della formulazione di Green-Schwarz è un'invarianza per particolari trasformazioni fermioniche nel worldsheet, dette trasformazioni κ, che sostituiscono la supersimmetria locale di worldsheet della formulazione NSR. L'invarianza per trasformazioni κ, scoperta da Siegel [60] in un modello semplificato, è necessaria per eliminare i gradi di libertà fermionici superflui che invaliderebbero la supersimmetria di spazio-tempo.

Le trasformazioni κ sono tuttavia responsabili della mancanza, a tutt'oggi, di uno schema di quantizzazione covariante consistente della superstringa di Green-Schwarz. La difficoltà principale di tali trasformazioni è che, volendo preservare la covarianza di Lorentz, necessitano a livello quantistico di un numero infinito di ghost. Si tratta pertanto di trasformazioni con grado di riducibilità infinito. L'unica possibilità fino ad ora attuabile per quantizzare la superstringa di Green-Schwarz è l'imposizione di un gauge-fixing operativo non covariante. In questo lavoro useremo un tale gauge-fixing in quanto sufficiente per le necessità del calcolo che intendiamo svolgere.

Nel modello sigma associato alla superstringa di Green-Schwarz l'invarianza κ a livello classico non è più scontata. Tale invarianza è presente se i campi di background soddisfano a vincoli opportuni, che in effetti risultano sufficienti a porre on-shell la supergravità di background.

L'invarianza κ classica del modello sigma di superstringa di Green-Schwarz richiede, all'ordine zero nella costante di accoppiamento di stringa α', che il background soddisfi le equazioni della supergravità pura disaccoppiata dalla super Yang-Mills. L'accoppiamento

tra SUGRA e SYM, come vedremo, avviene richiedendo l'invarianza κ a livello quantistico, e dunque modificando opportunamente le equazioni del moto del background all'ordine α' in modo da riassorbire le anomalie κ del modello sigma.

E', in realtà, ipotizzabile una procedura perturbativa [12] che produca le correzioni al modello SUGRA-SYM ordine per ordine nella costante di accoppiamento di stringa α' (che nei modelli sigma di stringa svolge il ruolo di $\hbar$), calcolando loop per loop le anomalie κ del modello sigma e modificando di conseguenza i vincoli di background.

In questa tesi dimostreremo la convenienza e l'eleganza di tale procedura, in particolare calcolando, per la prima volta, l'anomalia κ connessa al termine di Chern-Simons di Lorentz. Vedremo anche i problemi tecnici, tra i quali il più importante è quello collegato alla presenza di divergenze infrarosse, e le limitazioni di tale procedura [33].

L'algoritmo per calcolare le correzioni alla teoria effettiva di supergravità, che si basa sul calcolo loop per loop delle anomalie κ, si confronta favorevolmente con altre più note procedure. In particolare, tale algoritmo presenta un decisivo vantaggio rispetto alla tecnica delle funzioni beta [17]: una correzione alla teoria effettiva, che con la tecnica delle funzini beta richiede calcoli ad n loop, con la tecnica delle anomalie κ è ottenuta più facilmente con calcoli ad $n-1$ loop. Ad esempio, l'accoppiamento di Lorentz Chern-Simons che ricaveremo calcolando l'anomalia κ ad un loop, con la tecnica delle funzioni beta necessita di un calcolo dell'azione effettiva a due loop.

La struttura delle anomalie κ si può derivare con argomenti di tipo coomologico basati sulla condizione di consistenza di Wess-Zumino (WZ) che stabilisce l'invarianza delle anomalie sotto trasformazioni quantistiche BRST. Come vedremo, una tale analisi consente di escludere la presenza di anomalie κ pericolose, ovvero che non possono essere riassorbite da opportune correzioni dei vincoli della teoria di background nel superspazio [12]. Ciò che questa analisi non fornisce, tuttavia, è il valore del coefficiente di tali anomalie, coefficiente che è rivelato solo dal calcolo esplicito loop per loop. In questa tesi faremo, per l'appunto, il calcolo esplicito delle anomalie κ di tipo Chern-Simons e verificheremo che tali anomalie sono riassorbite imponendo $dH = \frac{\alpha'}{4}(\mathrm{tr}\, F^2 - \mathrm{tr}\, R^2)$, ovvero la relazione che ci aspettiamo per avere un background SUGRA-SYM consistente, con l'esatto coefficiente richiesto dal meccanismo di Green-Schwarz di cancellazione delle anomalie chirali di supergravità.

Come vedremo, l'anomalia κ associata alla Chern-Simons di Lorentz riceve contributi

sia dall'integrazione sui gradi di libertà fermionici che dall'integrazione su quelli bosonici della superstringa.

Il lavoro esposto nella presente tesi viene così organizzato.

Nel primo capitolo descriveremo il modello sigma eterotico di Green-Schwarz a livello classico, ed il relativo background SUGRA-SYM. Poiché a livello classico all'ordine zero in α' il modello sigma impone sul background solo i vincoli della supergravità pura $D = 10$ $N = 1$ e della teoria di Yang-Mills supersimmetrica disaccoppiata, descriveremo estesamente in Sez. 1.1 tale background "classico", anche se il sistema SUGRA disaccoppiato da SYM non è consistente a livello quantistico. Per i calcoli che svolgeremo nei capitoli seguenti sarà infatti sufficiente un tale background.

Nel secondo capitolo presenteremo una discussione generale sulla procedura di quantizzazione nel linguaggio delle trasformazioni globali di Becchi, Rouet, Stora e Tyutin (BRST) e nella sua estensione più moderna introdotta da Batalin e Vilkovisky (BV). In Sez. 2.1 verranno appunto descritti il formalismo canonico delle antiparentesi, la master equation, il gauge-fixing (che nel formalismo BV è una particolare trasformazione canonica), e le modifiche necessarie per trattare teorie riducibili. In Sez. 2.2 affronteremo, con questo moderno formalismo, la problematica della rinormalizzazione. Lo schema della regolarizzazione che utilizzeremo, cioè la Regolarizzazione Dimensionale (RD), verrà descritta in Sez. 2.2.1. Descriveremo poi, in dettaglio, la procedura di rinormalizzazione ad un loop nei due casi possibili, e cioè quando la regolarizzazione non invalida le simmetrie presenti classicamente nell'azione e quando, invece, tali simmetrie non sono preservate dalla procedura di regolarizzazione. Concluderà il capitolo (Sez. 2.3) la formalizzazione BV della procedura di sviluppo in coordinate normali: lo sviluppo in coordinate normali verrà introdotto come una particolare trasformazione canonica.

Nel terzo capitolo analizzeremo più in dettaglio il modello sigma eterotico GS. Successivamente alla costruzione della relativa azione estesa, che nel formalismo BV contiene tutte le informazioni sull'azione e sulle sue simmetrie, presenteremo l'analisi coomologica BRST delle potenziali anomalie κ presenti in questo modello (Sez. 3.2). In Sez. 3.3 calcoleremo esplicitamente lo sviluppo in coordinate normali dell'azione e delle trasformazioni BRST dei campi quantistici semplificando i risultati usando le equazioni del background SUGRA-SYM.

Il quarto capitolo sarà dedicato al calcolo esplicito ad un loop delle anomalie κ. Il modello sigma eterotico GS sviluppato in coordinate normali risulta invariante per trasformazioni combinate dei campi di background e dei campi quantistici di stringa di gauge e di Lorentz. Il calcolo delle relative anomalie di Yang-Mills e di Lorentz rappresenta un utile strumento per la comprensione delle anomalie κ nel settore rispettivamente di gauge e di Lorentz, con cui condividono molte analogie. Pertanto calcoleremo, in sequenza, l'anomalia di Yang-Mills, l'anomalia κ nel settore di Yang-Mills, l'anomalia di Lorentz e l'anomalia κ nel settore gravitazionale.

In Sez. 4.5 verranno discusse le correzioni al background SUGRA-SYM classico che la cancellazione delle suddette anomalie comporta. Analizzeremo anche la possibile presenza di ulteriori anomalie κ gauge- e Lorenz-invarianti. Chiuderà il capitolo una breve descrizione delle modifiche necessarie per poter effettuare un calcolo a due loop di modello sigma.

Infine due appendici e la bibliografia concluderanno il lavoro di tesi.

Capitolo 1

Il modello sigma eterotico di Green-Schwarz ed il relativo background SUGRA-SYM a livello classico

In questo capitolo introduciamo il modello sigma eterotico a livello classico presentandone prima il background SUGRA-SYM disaccoppiato e successivamente l'azione classica del modello sigma relativo.

1.1 Il sistema SUGRA-SYM disaccoppiato

Il modello SUGRA-SYM $N = 1$, $D = 10$ è costituito dalla supergravità pura $N = 1$ e da una teoria di Yang-Mills supersimmetrica in dieci dimensioni. Il contenuto in termini di campi fisici di questo modello è rappresentato dal gravitone ed il relativo partner, il gravitino, dal dilatone e relativo partner, il dilatino (o gravitello), e dal gravifotone, un tensore antisimmetrico a due indici, nel settore gravitazionale; il settore di gauge contiene i bosoni di gauge ed i relativi gaugini nella rappresentazione aggiunta del gruppo di gauge G. Il caso interessante è quello in cui G è $SO(32)$ o $E_8 \times E_8$, perché diventa operativo il meccanismo di cancellazione delle anomalie duali di Green-Schwarz. Tale modello rappresenta il background del modello sigma eterotico di Green-Schwarz. Al livello classico del modello sigma eterotico di Green-Schwarz il background richiesto per assicurare l'invarianza κ è il limite del modello SUGRA-SYM in cui SUGRA è disaccoppiato da SYM.

Considereremo solamente il caso in cui il gruppo di gauge è $SO(32)$, poiché la costruzione dei fermioni eterotici a 32 componenti che assicurano l'assenza di anomalie conformi nel modello sigma di Green-Schwarz associato è facilmente attuabile, in quanto $SO(32)$ possiede una rappresentazione irriducibile 32-dimensionale, la fondamentale. La rappresentazione irriducibile di $E_8 \times E_8$ di dimensione più bassa è invece la 496 e ciò impedisce, in questo caso, una semplice costruzione del modello sigma.

In questa sezione descriveremo estesamente tale modello disaccoppiato usando tecniche di superspazio.

Il superspazio in dieci dimensioni [10] è parametrizzato dalle coordinate $Z^M = (X^m, \theta^\mu)$, dove X^m $(m = 0, 1, \ldots, 9)$ sono le ordinarie coordinate di spazio-tempo e θ^μ $(\mu = 1, \ldots, 16)$ sono variabili di Grassmann. La uno-forma di supervielbein $E^A = dZ^M E_M{}^A(Z)$ descrive il sistema di riferimento localmente piatto, dove $A = \{a, \alpha\}$, $(a = 0, 1 \ldots, 9;\ \alpha = 1, \ldots, 16)$, è un indice piatto (le lettere all'inizio dell'alfabeto rappresentano indici piatti, lettere latine minuscole rappresentano indici vettoriali, lettere greche minuscole rappresentano indici spinoriali e lettere latine maiuscole comprendono entrambi). Per il gruppo di Lorentz dieci-dimensionale locale utilizzeremo una metrica di Minkowski η_{ab} di segnatura -8.

Le superforme di grado p possono essere decomposte nella base delle vielbein come

$$\phi_p = \frac{1}{p!} E^{A_1} - E^{A_p} \phi_{A_p - A_1}(Z).$$

La uno-forma di connessione a valori nell'algebra di Lie $SO(32)$ è $A = E^B A_B(Z)$, mentre la uno-forma di connessione a valori nell'algebra di Lorentz è $\Omega_A{}^B = E^C \Omega_{CA}{}^B(Z)$. Un supercampo $\psi_A{}^B$ a valori nell'algebra di Lorentz è tale che $\psi_{ab} = -\psi_{ba}$, $\psi_a{}^\alpha = \psi_\alpha{}^a = 0$, $\psi_\alpha{}^\beta = \frac{1}{4}(\Gamma^{ab})_\alpha{}^\beta \psi_{ab}$. Non introduciamo ora la due-forma $B = \frac{1}{2} E^A E^B B_{BA}(Z)$ di potenziale relativa al fotone scalare in quanto tale potenziale verrà ricostruito facendo uso dei supercampi già presenti. Le matrici gamma con k indici antisimmetrici sono definite dalla relazione

$$\Gamma^{a_1 - a_k} \equiv \Gamma^{[a_1} - \Gamma^{a_k]}$$

dove la parentesi quadra indica l'antisimmetrizzazione degli indici con peso $\frac{1}{k!}$. Le matrici $(\Gamma^a)_{\alpha\beta}$ e $(\Gamma_a)^{\alpha\beta}$ sono matrici di Weyl che soddisfano l'algebra di Weyl (vedasi l'appendice A)

$$(\Gamma^a)_{\alpha\beta}(\Gamma^b)^{\beta\gamma} + (\Gamma^b)_{\alpha\beta}(\Gamma^a)^{\beta\gamma} = 2\eta^{ab}\delta^\gamma_\alpha.$$

I campi di curvatura associati ad E^A, $\Omega_A{}^B$ ed A sono definiti da

$$T^A = DE^A = \frac{1}{2}E^B E^C T_{CB}{}^A \tag{1.1a}$$

$$R_F{}^G = d\Omega_F{}^G + \Omega_F{}^C \Omega_C{}^G = \frac{1}{2}E^A E^B R_{BAF}{}^G \tag{1.1b}$$

$$F = dA + AA = \frac{1}{2}E^A E^B F_{BA} \tag{1.1c}$$

cui corrispondono le identità di Bianchi

$$DT^A = E^B R_B{}^A \tag{1.2a}$$

$$DR_F{}^G = 0 \tag{1.2b}$$

$$\mathcal{D}F = 0 \tag{1.2c}$$

dove $d = dZ^M \partial_M$, D è il superdifferenziale Lorentz-covariante, e $\mathcal{D}$ è il superdifferenziale gauge covariante.

Le (1.2) in componenti si scrivono

$$D_{[A}T_{BC)}{}^D + T_{[AB}{}^G T_{GC)}{}^D = R_{[ABC)}{}^D \tag{1.3a}$$

$$D_{[A}R_{BC)F}{}^G + T_{[AB}{}^H R_{HC)F}{}^G = 0 \tag{1.3b}$$

$$\mathcal{D}_{[A}F_{BC)} + T_{[AB}{}^G F_{GC)} = 0, \tag{1.3c}$$

dove la notazione $[\cdots)$ indica antisimmetrizzazione graduata degli indici non sommati. Nel seguito, $[\cdots]$ indica antisimmetrizzazione e $(\cdots)$ indica simmetrizzazione. In realtà tali identità non sono indipendenti: per il teorema di Dragon [23] le identità sulla curvatura $R_F{}^G$ (1.3b) sono già contenute in quelle sulla torsione. Tuttavia l'uso combinato delle identità (1.3b) e (1.3a) consente una più agevole soluzione del sistema di equazioni. Inoltre, poiché le identità per F (1.3c) e quelle per $R_F{}^G$ (1.3b) sono formalmente le stesse (cambia solo il gruppo, $SO(32)$ in un caso ed $SO(10)$ nell'altro) se i vincoli per F e per $R_F{}^G$ sono gli stessi, le soluzioni delle identità per F e $R_F{}^G$ si possono ottenere in modo parallelo.

Le identità di Bianchi (1.3) si ordinano secondo la regola che attribuisce agli indici covarianti bosonici e fermionici rispettivamente il valore $+1$ e $+1/2$, ed agli indici controvarianti bosonici e fermionici rispettivamente il valore -1 e $-1/2$. Cosí, ad esempio, l'identità della torsione di ordine più basso uguale a $1/2$ è

$$D_{[\alpha}T_{\beta\gamma)}{}^d + T_{[\alpha\beta}{}^G T_{G\gamma)}{}^d = R_{[\alpha\beta\gamma)}{}^d = 0. \tag{1.4}$$

I superpotenziali contengono un gran numero di gradi di libertà non fisici che devono venire eliminati imponendo opportuni vincoli sulle curvature. A tal scopo imporremo dei vincoli *cinematici* sulle componenti della torsione $T_{AB}{}^{C}$ compatibili con il limite di superspazio piatto, e dei vincoli *dinamici* sulle componenti della curvatura a valori nell'algebra di Lorentz R_{AB} e sulla curvatura a valori nell'algebra di gauge F_{AB} con lo scopo di porre "on-shell" la teoria, ovvero di far sì che le identità di Bianchi in tal modo vincolate diano origine alle equazioni del moto del sistema SUGRA-SYM.

1.1.1 Scelta dei vincoli

Una specifica teoria di supergravità può essere presentata in formulazioni differenti dotate però dello stesso contenuto in termini dei gradi di libertà fisici che essa descrive. A tale arbitrarietà corrisponde una libertà nella ridefinizione di vielbein e connessioni, che permette di tradurre una nell'altra le diverse formulazioni. Nel linguaggio di superspazio le diverse formulazioni sono individuate dall'insieme completo dei vincoli dei supercampi di torsione e di curvatura necessari a porre la teoria on-shell. Sfrutteremo quindi la libertà di ridefinizione dei campi di supergravità seguendo i vincoli per noi più convenienti.

I vincoli usati in Ref. [30, 17] per il sistema SUGRA-SYM accoppiato si rivelano adatti per svolgere calcoli nel modello sigma associato. Infatti, anche a costo di una maggiore complessità del settore di Yang-Mills, il settore gravitazionale del modello SUGRA-SYM è, in questo caso, semplificato. Ciò si traduce, nel modello sigma sviluppato in coordinate normali, in un minor numero di grafici di Feynman che devono essere considerati per calcolare l'azione effettiva.

Noi useremo questi vincoli in una versione leggermente modificata che semplifica ulteriormente il settore gravitazionale. Nel caso del modello SUGRA-SYM disaccoppiato (ordine zero in α'), possiamo imporre infatti il vincolo [12]

$$R_{\alpha\beta f}{}^{g} = 0 \tag{1.5}$$

per la curvatura gravitazionale analogo al vincolo per la curvatura di Yang-Mills [58]

$$F_{\alpha\beta} = 0. \tag{1.6}$$

Nella discussione seguente, tratteremo (1.5) come vincolo dinamico della supergravità pura, senza introdurre la due-superforma di potenziale B, né i vincoli sulla curvatura $H = dB$,

né le identità di Bianchi associate. La curvatura H verrà ricostruita successivamente con campi già presenti nella teoria, e verificheremo che essa soddisfa ai vincoli standard. Per maggiori dettagli su questa procedura particolare, vedasi Ref. [32]. Le versioni accoppiate del modello SUGRA-SYM si manifestano con la comparsa a secondo membro della (1.5) di termini che appartengono alla rappresentazione 120.

Requisito irrinunciabile nella scelta dei vincoli è che essi nel limite di superspazio piatto conducano alla supersimmetria rigida, che in dieci dimensioni si scrive

$$Q_\alpha Q_\beta + Q_\beta Q_\alpha = 2\Gamma_{\alpha\beta}, \tag{1.7}$$

dove Q_α sono i 16 generatori della supersimmetria in $D = 10$. A tal scopo si impone

$$T_{\alpha\beta}{}^a = 2\Gamma^a_{\alpha\beta}. \tag{1.8}$$

Nel seguito faremo uso della tecnica di analisi del contenuto in rappresentazioni irriducibili (brevemente *irrep*) di $SO(10)$; questo metodo permette di evitare inutili manipolazioni algebriche che, pur semplici concettualmente, sono molto lunghe. Tali rappresentazioni verranno indicate con la loro dimensione, cui corrisponde nel linguaggio tensoriale il numero di componenti del tensore rappresentativo.

Come dimostrato in Ref. [37], la sola rappresentazione che non è eliminabile da $T_{\alpha\beta}{}^a$ tramite ridefinizioni delle supervielbein e delle connessioni è la 1050, ovvero un supercampo autoduale a sei indici di cui cinque antisimmetrici, $W^{a_1\cdots a_5,a}$, $\overset{1050}{T}{}_{\alpha\beta}{}^a = W^{a_1\cdots a_5,a}(\Gamma_{a_1\cdots a_5})_{\alpha\beta}$. La scelta (1.8) significa più precisamente $\overset{1050}{T}{}_{\alpha\beta}{}^a = 0$. In effetti non sono note in letteratura formulazioni di supergravità in cui $T_{\alpha\beta}{}^a$ contenga una 1050; poiché noi stiamo descrivendo la teoria minimale, è lecito assumere che tale rappresentazione non sia presente. La decomposizione in irreps di $T_{\alpha\beta}{}^\gamma$ e $T_{\alpha a}{}^b$ è la seguente:

$$T_{\alpha\beta}{}^\gamma = (2\cdot 16 \oplus 144 \oplus 560 \oplus 1440) \tag{1.9a}$$

$$T_{\alpha a}{}^b = (2\cdot 16 \oplus 2\cdot 144 \oplus 560 \oplus 720). \tag{1.9b}$$

Grazie alle ridefinizioni [37, 22]

$$\begin{aligned} E'^\alpha &= E^\alpha + E^b\, H_b{}^\alpha \\ \Omega'_{\alpha a}{}^b &= \Omega_{\alpha a}{}^b + X_{\alpha a}{}^b, \end{aligned} \tag{1.10}$$

dove $H_b{}^\alpha$ (contenuto in irreps $16 \oplus 144$) ed $X_{\alpha a}{}^b$ (contenuto in irreps $16 \oplus 144 \oplus 560$) sono opportuni supercampi covarianti, possiamo eliminare da $T_{\alpha a}{}^b$ tutte le irreps eccetto la 720. L'identità della torsione all'ordine più basso (1.4) (contenuto in irreps $14 \oplus 144 \oplus 560 \oplus 720 \oplus 1440 \oplus 5280$) si scrive, grazie al vincolo (1.8)

$$(\Gamma^d)_{\delta(\alpha} T_{\beta\gamma)}{}^\delta = (\Gamma^g)_{(\alpha\beta} T_{\gamma)g}{}^d. \tag{1.11}$$

Questa relazione si traduce in relazioni lineari tra le rappresentazioni irriducibili di $T_{\alpha\beta}{}^\gamma$ e quelle in $T_{\alpha a}{}^b$ che tra quelle che sono contenute nella relazione (1.11). Poiché $T_{\alpha\beta}{}^\gamma$ non contiene la 720, neppure $T_{\alpha a}{}^b$ la contiene e dunque si ha

$$T_{\alpha a}{}^b = 0 \tag{1.12}$$

e la (1.11) diviene semplicemente

$$(\Gamma^a)_{\delta(\alpha} T_{\beta\gamma)}{}^\delta = 0. \tag{1.13}$$

Dunque da $T_{\alpha\beta}{}^\gamma$ vengono eliminate tutte le irreps eccetto la 16, che corrisponde ad uno spinore λ_α. La 16 è contenuta in due forme distinte in relazione tra loro grazie alla (1.13), che implica

$$T_{\alpha\beta}{}^\gamma = 2\delta^\gamma_{(\alpha}\lambda_{\beta)} - (\Gamma^g)_{\alpha\beta}(\Gamma_g)^{\gamma\varphi}\lambda_\varphi. \tag{1.14}$$

A questo punto si è conclusa la discussione sui vincoli cinematici della torsione, che sono nella nostra scelta i vincoli (1.8), (1.12) e (1.14), che qui riscriviamo:

$$T_{\alpha\beta}{}^a = 2\Gamma^a_{\alpha\beta} \tag{1.15a}$$

$$T_{\alpha a}{}^b = 0 = T_{a\alpha}{}^b \tag{1.15b}$$

$$T_{\alpha\beta}{}^\gamma = 2\delta^\gamma_{(\alpha}\lambda_{\beta)} - (\Gamma^g)_{\alpha\beta}(\Gamma_g)^{\gamma\varphi}\lambda_\varphi. \tag{1.15c}$$

L'algebra di commutazione implica che il supercampo λ_α è la derivata spinoriale del supercampo scalare ϕ, il dilatone:

$$\lambda_\alpha = D_\alpha \phi. \tag{1.16}$$

La teoria di Yang-Mills viene posta on-shell dal vincolo dinamico

$$F_{\alpha\beta} = 0. \tag{1.17a}$$

Una volta deciso di non includere la 1050 in $T_{\alpha\beta}{}^{a}$ l'unica altra libertà rimasta in termini di rappresentazioni, modulo ridefinizioni di supervielbein e connessioni è contenuta in $R_{\alpha\beta f}{}^{g}$ nella forma di una possibile 120. La supergravità *pura* on-shell non contiene questa 120, e si può quindi imporre come vincolo dinamico

$$R_{\alpha\beta f}{}^{g} = 0. \tag{1.17b}$$

La scelta del vincolo (1.17b) consentirà, come vedremo, di mantenere un forte parallelo tra i settori gravitazionale e di gauge ed è una scelta chiave per ridurre la complessità dell'analisi del modello sigma di stringa.

Il settore di gauge e quello gravitazionale non sono accoppiati in supergravità pura. La rappresentazione irriducibile 120 costruita con campi di Yang-Mills relativa all'accoppiamento alla Chapline-Manton non è presente: in tal caso si può verificare che il principio di minima azione richiede effettivamente che in presenza di supergravità pura i campi di gauge siano di pura gauge. Nel seguito noi manterremo acceso il settore di gauge, anche se si è in presenza di supergravità pura, considerando la presenza dei campi di gauge nelle equazioni di supergravità come un'approssimazione formale di ordine α^0 della teoria accoppiata SUGRA-SYM.

1.1.2 Soluzione delle identità di Bianchi

Le identità di Bianchi della torsione di ordine 1 sono (utilizzando i vincoli sulla torsione e sulla curvatura R)

$$2T_{a(\alpha}{}^{\gamma}(\Gamma^{b})_{\beta)\gamma} + (\Gamma^{g})_{\alpha\beta}T_{ga}{}^{b} = 0 \tag{1.18a}$$

$$D_{(\alpha}T_{\beta\gamma)}{}^{\delta} - 2(\Gamma^{g})_{(\alpha\beta}T_{\gamma)g}{}^{\delta} + T_{(\alpha\beta}{}^{\varepsilon}T_{\gamma)\varepsilon}{}^{\delta} = 0. \tag{1.18b}$$

Il contenuto in termini di irreps di $SO(10)$ di $T_{ab}{}^{c}$ (e dunque pure di $T_{a\alpha}{}^{\beta}$, in virtù della (1.18a)) è $10 \oplus 120 \oplus 320$. Un'analisi attenta mostra che solo la 120 permette una soluzione delle (1.18); la 120 è la rappresentazione corrispondente ai tensori antisimmetrici a tre indici, cosicché si ha

$$T_{abc} \equiv T_{ab}{}^{g}\eta_{gc} = T_{[abc]} \tag{1.19a}$$

$$T_{a\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{4}(\Gamma^{bc})_{\alpha}{}^{\beta}T_{abc}. \tag{1.19b}$$

Come conseguenza, la (1.18b) viene risolta in $D_\alpha \lambda_\beta$, facendo uso dell'identità

$$T_{(\alpha\beta}{}^{\varepsilon} T_{\varepsilon\gamma)}{}^{\delta} = -(\Gamma^g)_{(\alpha\beta}(\Gamma_g)^{\delta\varepsilon}\lambda_\varepsilon\lambda_{\gamma)}, \tag{1.20}$$

dalla relazione

$$D_\alpha\lambda_\beta = -\Gamma^g_{\alpha\beta} D_g\phi + \lambda_\alpha\lambda_\beta + \frac{1}{12}(\Gamma_{abc})_{\alpha\beta}T^{abc}. \tag{1.21}$$

Tale relazione è compatibile con $\lambda_\alpha = D_\alpha\phi$.

Si può ora risolvere nelle curvature $R_{a\alpha f}{}^g$ ed $F_{a\alpha}$, a partire dai rispettivi vincoli (1.17b), (1.17a), utilizzando i vincoli (1.8), (1.12) e (1.14) sulla torsione ed imponendo le rispettive identità di Bianchi (1.3b) e (1.3c). L'identità di Bianchi per F (1.3c) all'ordine più basso, 3/2, grazie ai vincoli (1.17a) e (1.8) si scrive

$$(\Gamma^g)_{(\alpha\beta}F_{g\gamma)} = 0. \tag{1.22}$$

Il significato di tale equazione è che delle due irreps presenti in $F_{a\alpha}$, la $\overline{16}$ e la 144, solo la $\overline{16}$ è presente, il supercampo χ^α corrispondente al gluino, nella forma

$$F_{a\alpha} = 2(\Gamma_a)_{\alpha\varepsilon}\chi^\varepsilon. \tag{1.23}$$

A tale relazione corrisponde l'analoga relazione per la curvatura di Lorentz,

$$R_{a\alpha fg} = 2(\Gamma_a)_{\alpha\varepsilon}T^\varepsilon_{fg}. \tag{1.24}$$

Le identità della torsione di ordine 2 sono

$$D_\alpha T_{ab}{}^c + 2(\Gamma^c)_{\alpha\gamma}T_{ab}{}^\gamma = 2R_{\alpha[ab]}{}^c \tag{1.25a}$$

$$D_a T_{\alpha\beta}{}^\gamma + 2D_{(\alpha}T_{\beta)a}{}^\gamma + 2T_{a(\alpha}{}^\varepsilon T_{\beta)\varepsilon}{}^\gamma + 2\Gamma^g_{\alpha\beta}T_{ga}{}^\gamma - T_{\alpha\beta}{}^\varepsilon T_{a\varepsilon}{}^\gamma = 2R_{a(\alpha\beta)}{}^\gamma. \tag{1.25b}$$

La (1.25a) dà immediatamente

$$D_\alpha T_{abc} = -6T_{[ab}{}^\varepsilon(\Gamma_{c]})_{\varepsilon\alpha}, \tag{1.26}$$

quindi la (1.25b) viene di conseguenza risolta nella

$$(\Gamma^g)_{\alpha\varepsilon}T_{ga}{}^\varepsilon = D_a\lambda_\alpha + \frac{1}{4}(\Gamma^{bc})_\alpha{}^\beta T_{bca}\lambda_\beta. \tag{1.27}$$

Passiamo ora alle identità di Bianchi della curvatura F di ordine 2. Si ha

$$2\mathcal{D}_{(\alpha}F_{\beta)a} + 2(\Gamma^g)_{\alpha\beta}F_{ga} + T_{\alpha\beta}{}^\varepsilon F_{\varepsilon a} = 0, \tag{1.28}$$

che utilizzando la (1.23) e la (1.13) diviene

$$2(\Gamma_a)_{\alpha\varepsilon}\left(\mathcal{D}_\beta\chi^\varepsilon - T_{\varphi\beta}{}^\varepsilon\chi^\varphi\right) = (\Gamma^g)_{\alpha\beta}F_{ga} \tag{1.29}$$

ovvero

$$\mathcal{D}_\alpha\chi^\beta = T_{\varepsilon\alpha}{}^\beta\chi^\varepsilon + \frac{1}{4}(\Gamma^{ab})_\alpha{}^\beta F_{ab} \tag{1.30}$$

cui corrisponde l'analoga relazione nel settore gravitazionale

$$D_\alpha T_{fg}{}^\beta = T_{\varepsilon\alpha}{}^\beta T_{fg}{}^\varepsilon + \frac{1}{4}(\Gamma^{ab})_\alpha{}^\beta R_{abfg}. \tag{1.31}$$

Le identità di Bianchi di ordine 2 della torsione sono

$$D_{[a}T_{bc]}{}^d - T_{[ab}{}^g T_{c]g}{}^d = R_{[abc]}{}^d \tag{1.32a}$$

$$D_\alpha T_{ab}{}^\beta + 2D_{[a}T_{b]\alpha}{}^\beta - 2T_{\alpha[a}{}^\varepsilon T_{b]\varepsilon}{}^\beta + T_{ab}{}^g T_{g\alpha}{}^\beta + T_{ab}{}^\varepsilon T_{\varepsilon\alpha}{}^\beta = R_{ab\alpha}{}^\beta; \tag{1.32b}$$

la (1.32a) corrisponde all'identità di Bianchi per le componenti puramente vettoriali della curvatura con torsione. La parte antisimmetrica del tensore di Ricci $R_{ab} \equiv R_{agb}{}^g$ risulta proporzionale alla torsione,

$$R_{[ab]} = -\frac{1}{2}D^g T_{gab}, \tag{1.33}$$

mentre la (1.32b), combinata con la (1.31), implica la relazione

$$D_{[a}T_{bcd]} + \frac{3}{2}T^2_{[abcd]} = 0 \tag{1.34}$$

dove abbiamo definito $T^2_{abcd} \equiv T_{ab}{}^g T_{gcd}$.

Il significato della (1.34) è chiaro definendo la tre-superforma $H = \frac{1}{3!}E^A E^B E^C H_{CBA}$ nelle sue componenti tramite

$$H_{\alpha\beta\gamma} = 0 = H_{ab\alpha} \tag{1.35a}$$

$$H_{a\alpha\beta} = 2(\Gamma_a)_{\alpha\beta} \tag{1.35b}$$

e

$$H_{abc} = T_{abc}. \tag{1.36}$$

Infatti in tal caso la (1.34) e la (1.26) implicano le identità di Bianchi per la curvatura H

$$dH = 0. \tag{1.37}$$

Dunque esiste una due-superforma di potenziale $B = \frac{1}{2}E^A E^B B_{BA}$ tale che, localmente,

$$H = dB. \tag{1.38}$$

La relazione (1.38) è quella che definisce la supergravità pura, e la (1.37) è la relativa identità di Bianchi. Il modello SUGRA-SYM accoppiato presenta al secondo membro della (1.38) (e quindi anche della (1.38)) dei termini addizionali che determinano l'accoppiamento tra il settore di gauge e quello gravitazionale. L'accoppiamento alla Chapline-Manton [55] si ottiene definendo

$$H = dB + \frac{\alpha'}{4}\omega_{3YM}, \tag{1.39}$$

dove ω_{3YM} è la tre-superforma di Chern-Simons

$$\omega_{3YM} = \mathrm{tr}(AF - \frac{1}{3}A^3) \tag{1.40}$$

che ha differenziale $d\omega_{3YM} = \mathrm{tr}\, F^2$ (la traccia è nella rappresentazione fondamentale di $SO(32)$).

Come è noto, tale teoria presenta anomalie chirali che invece, grazie al meccanismo di Green-Schwarz, non sono presenti nella teoria che coinvolge anche la tre-superforma di Chern-Simons nella definizione di H

$$H = dB + \frac{\alpha'}{4}(\omega_{3YM} - \omega_{3L}), \tag{1.41}$$

dove

$$\omega_{3L} = \mathrm{tr}(\Omega R - \frac{1}{3}\Omega^3) \tag{1.42}$$

che ha differenziale $d\omega_{3L} = \mathrm{tr}\, R^2$ (qui la traccia è nella rappresentazione fondamentale di $SO(10)$).

L'identità (1.37) diviene in questo caso

$$dH = \frac{\alpha'}{4}(\mathrm{tr}\, F^2 - \mathrm{tr}\, R^2). \tag{1.43}$$

L'accoppiamento SUGRA-SYM si manifesta in $R_{\alpha\beta}$ invece con la comparsa di contributi (non riassorbibili tramite ridefinizioni dei supercampi) nella rappresentazione irriducibile 120 di $SO(10)$. L'identità (1.43) non è più risolvibile in conseguenza di questo fatto. Tale identità, con i vincoli (1.35), richiede che il secondo membro della (1.43) sia nullo nei settori

più bassi in cui tre o più indici spinoriali sono presenti. In Ref. [36] è stato dimostrato che vale la seguente identità:

$$\mathrm{tr}\, R^2 = dX + K, \tag{1.44}$$

essendo X e K superforme gauge- e Lorentz-invarianti, dove K è nulla nei settori con tre o più indici spinoriali. Allora con la definizione

$$H = dB + \frac{\alpha'}{4}(\omega_{3YM} - \omega_{3L}) + \frac{\alpha'}{4}X \tag{1.45}$$

si ha l'identità di Bianchi

$$dH = \frac{\alpha'}{4}(\mathrm{tr}\, F^2 - K) \tag{1.46}$$

che è ora risolvibile con i vincoli (1.35). Naturalmente è del tutto equivalente utilizzare la stessa definizione (1.41) e modificare i vincoli (1.35) come segue:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta\gamma} &= 0 \\ H_{a\alpha\beta} &= 2\Gamma_{a\alpha\beta} + \frac{\alpha'}{4}X_{a\alpha\beta} \\ H_{ab\alpha} &= \frac{\alpha'}{4}X_{ab\alpha} \end{aligned} \tag{1.47}$$

e la relazione tra H_{abc} e T_{abc},

$$H_{abc} = T_{abc} + \frac{\alpha'}{4}X_{abc}. \tag{1.48}$$

In Ref. [38], utilizzando la proprietà (1.44) è stata ottenuta la soluzione dell'identità (1.46) a tutti gli ordini in α', utilizzando i vincoli cosiddetti standard, che differiscono da quelli qui presentati per una ridefinizione dei campi. In Ref. [30] è stata successivamente ottenuta la corrispondente soluzione per un insieme di vincoli che sono solo leggermente differenti da quelli in uso nel presente lavoro.

Riprenderemo la discussione sul sistema SUGRA-SYM accoppiato in Sez. 1.2 e successivamente nell'ultimo capitolo.

Per quantio riguarda il settore di gauge, dall'identità di ordine 5/2 per F

$$\mathcal{D}_{[\alpha}F_{ab)} + T_{[\alpha a}{}^{\varepsilon}F_{\varepsilon b)} = 0 \tag{1.49}$$

si ricava direttamente la derivata spinoriale di F_{ab}

$$\mathcal{D}_\alpha F_{ab} = 4(\Gamma_{[a})_{\alpha\varepsilon}\mathcal{D}_{b]}\chi^\varepsilon + (\Gamma_{[a}{}^{f_1 f_2})_{\alpha\varepsilon}T_{b]f_1 f_2}\chi^\varepsilon. \tag{1.50}$$

Le relazioni necessarie del background SUGRA-SYM *disaccoppiato* sono state quindi ottenute. I vincoli che abbiamo imposto sono

$$T_{\alpha\beta}{}^{a} = 2\Gamma^{a}_{\alpha\beta}, \qquad T_{\alpha a}{}^{b} = 0 = T_{a\alpha}{}^{b} \tag{1.51a}$$

$$H_{a\alpha\beta} = 2(\Gamma_a)_{\alpha\beta}, \qquad H_{\alpha\beta\gamma} = 0 = H_{\alpha ab} = 0 \tag{1.51b}$$

$$F_{\alpha\beta} = 0 \tag{1.51c}$$

$$R_{\alpha\beta a}{}^{b} = 0. \tag{1.51d}$$

In conseguenza di questi vincoli le identità di Bianchi implicano le relazioni tra le altre componenti delle curvature:

$$T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 2\delta^{\gamma}_{(\alpha}\lambda_{\beta)} - (\Gamma_g)_{\alpha\beta}(\Gamma^g)^{\gamma\varepsilon}\lambda_{\varepsilon} \tag{1.52a}$$

$$T_{a\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{4}(\Gamma^{bc})_{\alpha}{}^{\beta}T_{abc} \tag{1.52b}$$

$$H_{abc} = T_{abc} \tag{1.52c}$$

$$R_{a\alpha bc} = 2(\Gamma_a)_{\alpha\varepsilon}T_{bc}{}^{\varepsilon} \tag{1.52d}$$

$$F_{a\alpha} = 2(\Gamma_a)_{\alpha\varepsilon}\chi^{\varepsilon} \tag{1.52e}$$

ed inoltre ci forniscono le seguenti espressioni per le derivate spinoriali delle curvature:

$$D_\alpha\lambda_\beta = -(\Gamma^g)_{\alpha\beta}D_g\phi + \lambda_\alpha\lambda_\beta + \frac{1}{12}(\Gamma^{abc})_{\alpha\beta}T_{abc} \tag{1.53a}$$

$$D_\alpha T_{abc} = -6(\Gamma_{[a})_{\alpha\varepsilon}T_{bc]}{}^{\varepsilon} \tag{1.53b}$$

$$D_\alpha T_{cd}{}^{\beta} = \frac{1}{4}(\Gamma^{ab})_{\alpha}{}^{\beta}R_{abcd} + T_{\alpha\varepsilon}{}^{\beta}T_{cd}{}^{\varepsilon} \tag{1.53c}$$

$$\mathcal{D}_\alpha\chi^{\beta} = \frac{1}{4}(\Gamma^{ab})_{\alpha}{}^{\beta}F_{ab} + T_{\alpha\varepsilon}{}^{\beta}\chi^{\varepsilon} \tag{1.53d}$$

$$\mathcal{D}_\alpha F_{ab} = 4(\Gamma_{[a})_{\alpha\varepsilon}\mathcal{D}_{b]}\chi^{\varepsilon} + (\Gamma_{[a}{}^{f_1f_2})_{\alpha\varepsilon}T_{b]f_1f_2}\chi^{\varepsilon}. \tag{1.53e}$$

1.1.3 Equazioni del moto

Le teorie di supergravità diecidimensionali presentano la proprietà che, una volta imposti i vincoli cinematici sulla torsione e quelli dinamici sulle curvature, le identità di Bianchi implicano automaticamente le equazioni del moto richiedendo la chiusura dell'algebra supersimmetrica.

La chiusura dell'algebra supersimmetrica si traduce algebricamente nella relazione

$$D_AD_B - (-)^{AB}D_BD_A = -T_{AB}{}^{C}D_C - R_{AB\#}{}^{\#}; \tag{1.54}$$

dovremo dunque utilizzare questa relazione per ottenere le equazioni del moto. L'unica equazione del moto che abbiamo già ottenuto è quella del gravitino, eq. (1.27). L'equazione del moto del gravitone si ottiene contraendo l'identità di ordine 2 della torsione (1.32b) con $(\Gamma^a\Gamma_c)_\beta{}^\alpha$ ed usandola nel primo termine dell'equazione del moto del gravitino, Eq. (1.27), cosicché

$$R_{bc} = 2D_cD_b\phi - D_aT^a{}_{bc}, \tag{1.55}$$

che previa simmetrizzazione dà le equazioni di Einstein

$$R_{(ab)} = 2D_{(a}D_{b)}\phi. \tag{1.56}$$

L'equazione del moto per il gravitello è ottenuta imponendo la chiusura dell'algebra supersimmetrica (1.54) alla (1.53a). La (1.54), applicata al gravitello λ_α dà

$$D_{(\varepsilon}D_{\alpha)}\lambda_\beta = -\Gamma^g_{\varepsilon\alpha}D_g\lambda_\beta - \frac{1}{2}T_{\varepsilon\alpha}{}^\delta D_\delta\lambda_\beta. \tag{1.57}$$

Confrontando con l'equazione ottenuta applicando la derivata spinoriale D_ε alla (1.53a) essa fornisce l'equazione del moto per il gravitello:

$$(\Gamma^a)^{\alpha\beta}D_a\lambda_\beta = 2(\Gamma^a)^{\alpha\beta}\lambda_\beta D_a\phi - \frac{1}{12}(\Gamma_{abc})^{\alpha\beta}T^{abc}\lambda_\beta. \tag{1.58}$$

Applicando D_α a questa equazione di ottiene poi l'equazione del moto per il dilatone:

$$D^aD_a\phi = 2D_a\phi D^a\phi - \frac{1}{12}T_{abc}T^{abc}. \tag{1.59}$$

Considerando poi $T_{abc} \equiv H_{abc}$ come la curvatura associata alla due-forma di potenziale B, si ricava l'equazione del moto per B_{ab} combinando (1.33) con (1.55):

$$D_cT^c{}_{ab} = -4D_{[a}D_{b]}\phi. \tag{1.60}$$

L'equazione del moto del gluino χ^ε è ottenuta calcolando $\mathcal{D}_{(\alpha}\mathcal{D}_{\beta)}\chi^\varepsilon$ utilizzando la (1.53d) e confrontando il risultato con l'applicazione della (1.54) per $A = \alpha$, $B = \beta$ su χ^ε, ed alla fine saturando con $\delta_\varepsilon{}^\beta$:

$$(\Gamma^g)_{\alpha\beta}\left(D_g\chi^\beta - D_g\phi\chi^\beta\right) = \lambda_\alpha\lambda_\beta\chi^\beta - \frac{1}{4}(\Gamma^{ab})_\alpha{}^\beta F_{ab}\lambda_\beta - \frac{1}{6}(\Gamma^{abc})_{\alpha\beta}T_{abc}\chi^\beta. \tag{1.61}$$

L'equazione del moto per F_{ab} si ottiene combinando la (1.61) e la (1.53e) con la relazione (1.54) applicata al caso di $\mathcal{D}_{[b}\mathcal{D}_{\alpha)}\chi^\beta$.

Non riportiamo il risultato poiché non ci servirà in seguito; tale equazione si può trovare, per vincoli leggermente diversi da quelli di questo lavoro, in Ref. [18].

1.2 Il sistema SUGRA-SYM accoppiato

Abbiamo trattato estesamente il caso di SUGRA disaccoppiato da SYM perché tale sistema rappresenta il background del modello sigma eterotico di GS a livello classico (all'ordine zero in α'). In questa sezione vogliamo discutere brevemente i modelli non minimali in cui SUGRA è accoppiato con SYM nel formalismo di superspazio.

Il sistema SUGRA-SYM disaccoppiato è caratterizzato dalla presenza di anomalie chirali che sono presenti anche nella versione accoppiata alla Chapline-Manton tramite la tre-superforma di Chern-Simons di gauge. E' necessaria infatti l'introduzione della tre-superforma di Chern-Simons di Lorentz nella definizione di H, dove i coefficienti di tali superforme (nel caso di $SO(32)$) sono esattamente quelli indicati nella relazione (di superspazio)

$$H = dB + \frac{\alpha'}{4}(\omega_{3YM} - \omega_{3L}). \tag{1.62}$$

La trasformazione anomala cui deve soddisfare B è quindi

$$\delta B = \frac{\alpha'}{4}\left(\mathrm{tr}(\mathcal{C}dA) - \mathrm{tr}(\mathcal{L}d\Omega)\right), \tag{1.63}$$

dove $\mathcal{C}$ ed $\mathcal{L}$ sono rispettivamente i parametri locali di trasformazione di gauge e di Lorentz.

L'identità di Bianchi associata alla (1.62),

$$dH = \frac{\alpha'}{4}\left(\mathrm{tr}\, F^2 - \mathrm{tr}\, R^2\right), \tag{1.64}$$

come già notato precedentemente, è risolvibile solo facendo uso del teorema di Ref. [36] sulla decomposizione di $\mathrm{tr}\, R^2$.

L'identità (1.64) in componenti,

$$D_{[A}H_{BCD)} + \frac{3}{2}T_{[AB}{}^{G}H_{GCD)} = \frac{3\alpha}{16\pi}\left(\mathrm{tr}\, F_{[AB}F_{CD)} - \mathrm{tr}\, R_{[AB}R_{CD)}\right), \tag{1.65}$$

è risolta in Ref. [30] a tutti gli ordini in α imponendo ad H i vincoli

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta\gamma} &= 0 \\ H_{a\alpha\beta} &= 2(\Gamma_a)_{\alpha\beta} + o(\alpha) \\ H_{ab\alpha} &= o(\alpha). \end{aligned} \tag{1.66}$$

Le relazioni tra i supercampi che si ottengono sono

$$T_{a\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{4}(\Gamma_{bc})_{\alpha}{}^{\beta} T_a{}^{bc} - \frac{\alpha}{16\pi}(\Gamma_a)_{\alpha\varepsilon} S^{\varepsilon\beta} \tag{1.67a}$$

$$D_\alpha T_{abc} = (\Gamma_{[a})_{\alpha\beta} \left(-6T_{bc]}{}^{\beta} - \frac{3\alpha}{8\pi} S_{bc}{}^{\beta} \right) \tag{1.67b}$$

$$\begin{aligned} D_\alpha \lambda_\beta = & -(\Gamma_g)_{\alpha\beta} D^g \phi + \lambda_\alpha \lambda_\beta + \\ & + \frac{1}{12}(\Gamma_{abc})_{\alpha\beta} \left[T^{abc} + \frac{\alpha}{64\pi}(\Gamma^{abc})_{\gamma\delta} S^{\gamma\delta} \right] \end{aligned} \tag{1.67c}$$

$$R_{\alpha\beta ab} = -\frac{\alpha}{8\pi}(\Gamma_{[a})_{\alpha\varepsilon} S^{\varepsilon\varphi} (\Gamma_{b]})_{\varphi\beta} \tag{1.67d}$$

$$R_{a\alpha bc} = 2(\Gamma_a)_{\alpha\beta} T_{bc}{}^{\beta} + \frac{3\alpha}{16\pi}(\Gamma_{[a})_{\alpha\beta} S_{bc]}{}^{\beta} \tag{1.67e}$$

dove $S^{\alpha\beta}$ rappresenta le correzioni, che compaiono nella forma di una irrep 120, ed $S_{ab}{}^{\alpha}$ è la irrep di dimensionalità più alta contenuta nella derivata spinoriale di $S^{\alpha\beta}$.

L'espressione di $S^{\alpha\beta}$ in termini degli altri supercampi è ottenuta risolvendo l'identità (1.65) a tutti gli ordini in α. Ottenuta la soluzione completa, e solo allora, è possibile dare la soluzione delle identità di Bianchi all'ordine α, che sarà discussa nell'ultimo capitolo.

1.3 Il modello sigma eterotico di Green-Schwarz

In questa sezione descriveremo il modello sigma eterotico di Green-Schwarz a livello classico, discutendo in particolare la sua caratteristica simmetria κ.

L'azione del modello sigma eterotico di Green-Schwarz in un background SUGRA-SYM è [45, 44]

$$I = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma \left(\sqrt{g} g^{ij} V_i{}^a V_{ja} + \varepsilon^{ij} V_i{}^C V_j{}^D B_{DC} - \sqrt{g} e_-{}^j \psi \mathcal{D}_j \psi \right). \tag{1.68}$$

Le notazioni sono le seguenti. Il worldsheet bidimensionale di stringa è parametrizzato dalle coordinate σ^i $(i, j = 0, 1)$. I campi del modello

sigma sono le zweibeins $e_\pm{}^i(\sigma)$, con le zweibein inverse $e_i{}^\pm$, le coordinate di superspazio Z^M che sono scalari di worldsheet ed i 32 fermioni eterotici di worldsheet di Majorana-Weyl $\psi^r(\sigma)$ $(r = 1, \ldots, 32)$ che stanno nella rappresentazione fondamentale di $SO(32)$. $\mathcal{D}_j\psi = (\partial_j - A_j)\psi$, dove $A_j = V_j{}^B A_B$ e la supervielbein indotta $V_i{}^A$ è definita come $V_i{}^A = \partial_i Z^M E_M{}^A$. Nel seguito useremo indici piatti di cono-luce sul worldsheet definiti da $W_\pm = e_\pm{}^i W_i$ dove W_i è un vettore di worldsheet. La metrica di worldsheet è $g_{ij}(\sigma)$, g^{ij}

è la sua inversa e $g = -\det g_{ij}$; ε^{ij} è il tensore antisimmetrico di Ricci. La metrica ed il tensore di Ricci possono essere espressi in termini delle zweibein dalle relazioni

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \frac{1}{2}\left(e_-{}^i e_+{}^j + e_+{}^i e_-{}^j\right) \\ \frac{\varepsilon^{ij}}{\sqrt{g}} &= \frac{1}{2}\left(e_-{}^i e_+{}^j - e_+{}^i e_-{}^j\right). \end{aligned} \tag{1.69}$$

Il proiettore autoduale $P^{ij} = g^{ij} + \varepsilon^{ij}/\sqrt{g}$ può essere espresso pure in termini delle zweibeins come $P^{ij} = e_-{}^i e_+{}^j$. Introducendo le matrici di Dirac bidimensionali γ^p in rappresentazione di Majorana $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tali che $\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed usando spinori di Majorana a due componenti ψ per descrivere i fermioni eterotici, l'ultimo termine della (1.68) può essere riscritto come

$$I_H = \frac{1}{2}\int d^2\sigma \sqrt{g} e_-{}^j \bar{\psi}\gamma_+ \mathcal{D}_j \psi = \frac{1}{2}\int d^2\sigma \sqrt{g} e_p{}^j \bar{\psi}\gamma^p \frac{1+\gamma_3}{2}\mathcal{D}_j\psi, \tag{1.70}$$

dove $\gamma_\pm = \gamma^0 \pm \gamma^1$ e $\bar{\psi} = \psi^T\gamma^0$. Per semplicità usiamo lo stesso simbolo degli spinori ad una componente poiché la distinzione è evidente dal contesto. L'ultima espressione in (1.70)

sarà usata in seguito.

L'azione (1.68) è invariante per diffeomorfismi in $d = 2$ e per trasformazioni locali di Lorentz e di Weyl bidimensionali. I parametri delle trasformazioni sono rispettivamente il vettore di worldsheet ξ^i e gli scalari l e w. Le trasformazioni di Lorentz e di Weyl agenti su un campo ad indici vettoriali piatti di worldsheet v^p sono le seguenti:

$$\delta_l v^p = l\varepsilon^p{}_q v^q \qquad \Rightarrow \qquad \delta_l v_\pm = \pm l v_\pm \tag{1.71a}$$

$$\delta_w v^p = w\delta^p{}_q v^q \qquad \Rightarrow \qquad \delta_w v_\pm = w v_\pm. \tag{1.71b}$$

Introducendo le trasformazioni di Weyl±Lorentz parametrizzate da $w_+{}^+ = w + l$ e $w_-{}^- = w - l$, i campi di stringa trasformano sotto diffeomorfismi in $d = 2$ e sotto trasformazioni di Weyl-Lorentz come:

$$\delta Z^M = \xi^k \partial_k Z^M \tag{1.72a}$$

$$\delta\psi = \xi^k\partial_k\psi \tag{1.72b}$$

$$\delta e_+{}^i = \xi^k \partial_k e_+{}^i - \partial_+\xi^i + w_+{}^+ e_+{}^i \tag{1.72c}$$

$$\delta e_-{}^i = \xi^k \partial_k e_-{}^i - \partial_-\xi^i + w_-{}^- e_-{}^i. \tag{1.72d}$$

1.3.1 La simmetria fermionica locale κ

La costruzione dell'azione della stringa nella formulazione di Green-Schwarz è tale da avere una peculiare invarianza locale fermionica individuata nella superparticella da Siegel [60]. Tale invarianza, detta invarianza κ, è necessaria per eliminare metà dei 16 gradi di libertà delle θ^μ; in tal caso agli 8 gradi di libertà bosonici fisici delle coordinate X^m corrispondono altrettanti gradi di libertà fermionici delle θ^μ, condizione necessaria per avere simmetria nel background.

Il parametro di trasformazione è un vettore di worldsheet autoduale che è anche uno spinore dello spazio-tempo di background $\kappa_{+\beta}(\sigma)$.

Prima di dare la legge di trasformazione dei campi di stringa sotto trasformazioni κ introduciamo le seguenti definizioni che ci saranno utili anche nel seguito:

$$w^a = 0 \tag{1.73a}$$
$$w^\alpha = V_-{}^a(\Gamma_a)^{\alpha\beta}\kappa_{+\beta} \equiv (\not{V}_-\kappa_+)^\alpha \tag{1.73b}$$
$$\mathcal{V}_+{}^\varepsilon = V_+{}^\varepsilon - \frac{1}{2}\psi\chi^\varepsilon\psi \tag{1.73c}$$
$$C = w^\alpha A_\alpha, \tag{1.73d}$$
$$L_f{}^g = w^\alpha \Omega_{\alpha f}{}^g, \tag{1.73e}$$
$$A_i = V_i{}^A A_A, \qquad F_i = V_i{}^A w^\beta F_{\beta A} \tag{1.73f}$$
$$\Omega_{if}{}^g = V_i{}^A \Omega_{Af}{}^g, \qquad R_{if}{}^g = V_i{}^A w^\beta R_{\beta Af}{}^g \tag{1.73g}$$

dove abbiamo introdotto la notazione secondo cui $\not{X} \equiv X^a(\Gamma_a)_{\alpha\beta}$ per un campo vettoriale X^a; scriveremo poi $w^A = (w^a, w^\alpha)$. I campi di stringa trasformano come segue:

$$\delta_\kappa Z^M = w^\alpha E_\alpha{}^M \tag{1.74a}$$
$$\delta_\kappa \psi = C\psi \tag{1.74b}$$
$$\delta_\kappa e_+{}^i = -4e_-{}^i \mathcal{V}_+{}^\varepsilon \kappa_{+\varepsilon} \tag{1.74c}$$
$$\delta_\kappa e_-{}^i = \delta_\kappa g = 0. \tag{1.74d}$$

I supercampi e le superforme del background trasformano di conseguenza,

$$\begin{aligned}
\delta_\kappa V_i{}^A &= D_i w^A + V_i{}^B w^\gamma T_{\gamma B}{}^A - V_i{}^B L_B{}^A && \text{(1.75a)}\\
&\equiv \partial_i w^A + w^B \Omega_{iB}{}^A + V_i{}^B w^\gamma T_{\gamma B}{}^A - V_i{}^B L_B{}^A \\
\delta_\kappa A_i &= \mathcal{D}_i C + F_i && \text{(1.75b)}\\
&\equiv \partial_i C + C A_i - A_i C + F_i \\
\delta_\kappa \Omega_{if}{}^g &= D_i L_f{}^g + R_{if}{}^g && \text{(1.75c)}\\
&\equiv \partial_i L_f{}^g + L_f{}^h \Omega_{ih}{}^g - \Omega_{if}{}^h L_h{}^g + R_{if}{}^g \\
\delta_\kappa B_{MN} &= w^\alpha \partial_\alpha B_{MN} && \text{(1.75d)}\\
\delta_\kappa T_{A\dots}{}^{B\dots} &= w^\alpha \partial_\alpha T_{A\dots}{}^{B\dots}. && \text{(1.75e)}
\end{aligned}$$

L'invarianza κ a livello classico impone al background i vincoli di supergravità pura e di super Yang-Mills. Per trasformazioni κ l'azione ha la seguente variazione:

$$\begin{aligned}
\delta_\kappa I = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma \left(2\sqrt{g} g^{ij} V_{ia} V_j{}^B w^\gamma T_{\gamma B}{}^a + \varepsilon^{ij} V_i{}^C V_j{}^D w^\gamma H_{\gamma DC} + \sqrt{g} e_-{}^j \psi F_j \psi\right) - \\
- 2\int d^2\sigma \sqrt{g} V_-^2 (\mathcal{V}_+{}^\varepsilon \kappa_{+\varepsilon}), \qquad \text{(1.76)}
\end{aligned}$$

dove $V_-^2 \equiv V_-{}^a V_{-a}$. L'annullamento del contributo puramente gravitazionale nella (1.76) richiede precisamente i vincoli (1.8), (1.12) e (1.35a), (1.35b). Utilizzando tali vincoli, infatti, la parte gravitazionale della (1.76) diviene

$$(\delta_\kappa I)_{\text{grav}} = 2\int d^2\sigma \left(\sqrt{g} V_-^2 V_+{}^\alpha \kappa_{+\alpha} - \sqrt{g} V_+{}^\alpha (\not{V}_- w)_\alpha\right) \qquad \text{(1.77)}$$

che si annulla poiché, grazie alla definizione (1.73b) di w^α, si ha

$$(\not{V}_- w)_\alpha = V_-^2 \kappa_{+\alpha}. \qquad \text{(1.78)}$$

L'annullamento del contributo di Yang-Mills nella (1.76) richiede il vincolo (1.17a) secondo cui le componenti più basse della curvatura F sono nulle. Grazie alle (1.17a) e (1.23)

$$F_i = -2 V_i^b w^\alpha (\Gamma_b)_{\alpha\beta} \chi^\beta \qquad \text{(1.79)}$$

e quindi, utilizzando la (1.78), si ha

$$F_- = -2 V_-^2 (\kappa_{+\varepsilon} \chi^\varepsilon). \qquad \text{(1.80)}$$

L'invarianza dell'azione classica sotto trasformazioni κ richiede quindi che siano soddisfatti i vincoli sulla torsione T^A (1.15a), (1.15b), sulla curvatura H (1.35a), (1.35b) e sulla curvatura F, (1.17a),

$$T_{\alpha\beta}{}^{a} = 2\Gamma^{a}_{\alpha\beta}, \qquad T_{\alpha a}{}^{b} = 0 = T_{a\alpha}{}^{b} \tag{1.81a}$$

$$H_{a\alpha\beta} = 2(\Gamma_a)_{\alpha\beta}, \qquad H_{\alpha\beta\gamma} = 0 = H_{\alpha ab} = 0 \tag{1.81b}$$

$$F_{\alpha\beta} = 0. \tag{1.81c}$$

Si noti che questi sono precisamente i vincoli di (1.51), eccettuato il vincolo sulla curvatura R, Eq. (1.51d). Non sono dunque imposti vincoli su $R_{\alpha\beta f}{}^{g}$. In particolare in $R_{\alpha\beta f}{}^{g}$ può o mendalign essere presente la rappresentazione 120 che caratterizza le versioni non minimali della supergravità.

Per mantenere l'invarianza κ a livello classico è dunque sufficiente che il background soddisfi le equazioni della supergravità pura. Vedremo nel quarto capitolo che a livello quantistico è necessario un background non minimale. Poiché non è presente la 120 in $R_{\alpha\beta f}{}^{g}$ possiamo imporre il vincolo [32]

$$R_{\alpha\beta f}{}^{g} = 0. \tag{1.82}$$

L'analogia che risulta dalla scelta di tale vincolo tra il settore di gauge e quello gravitazionale assicura una notevole semplificazione dei calcoli necessari per ottenere l'anomalia di Lorentz e permette di svolgere tali calcoli seguendo il più possibile l'analogia con il caso dell'anomalia di Yang-Mills.

Dato il vincolo (1.82) e la (1.24) si ha la relazione gemella della (1.79),

$$R_{ifg} = -2V_i^c w^\alpha (\Gamma_c)_{\alpha\beta} T_{fg}{}^{\beta} \tag{1.83}$$

cui consegue, grazie alla (1.78),

$$R_{-fg} = -2V_-^2 \kappa_{+\varepsilon} T_{fg}{}^{\varepsilon} \tag{1.84}$$

che è proporzionale a V_-^2, esattamente come nella (1.80).

Le (1.80) e (1.84), ovvero le

$$F_- = 0 \qquad \text{on-shell} \tag{1.85a}$$

$$R_{-f}{}^{g} = 0 \qquad \text{on-shell} \tag{1.85b}$$

risulteranno fondamentali nella derivazione dell'anomalia κ rispettivamente di Yang-Mills e di Lorentz.

1.3.2 Equazioni del moto

Per ottenere le equazioni del moto dei campi del modello sigma eterotico di Green-Schwarz calcoliamo le variazioni dell'azione (1.68) sotto le

$$\delta Z^M = y^A E_A{}^M \tag{1.86a}$$

$$\delta\psi = \Psi \tag{1.86b}$$

$$\delta e_\pm{}^i = h_\pm{}^i, \tag{1.86c}$$

dove y^a, y^α, Ψ ed $h_\pm{}^i$ sono i parametri della generica variazione. In conseguenza della (1.86a) si ha

$$\delta V_i{}^a = D_i y^A + V_i{}^B y^C T_{CB}{}^A - V_i{}^B \Sigma'_B{}^A, \qquad \Sigma'_B{}^A = y^C \Omega_{CB}{}^A \tag{1.87a}$$

$$\delta A_i = \mathcal{D}_i \Lambda' + V_i{}^B y^C F_{CB}, \qquad \Lambda' = y^C A_C. \tag{1.87b}$$

Per y^a solo non nullo si ha

$$\begin{aligned}\delta I = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma \,\big[&2\sqrt{g}g^{ij}\left(D_i y^a + V_i{}^B y^C T_{CB}{}^a\right) V_{ja} + \varepsilon^{ij} V_i{}^B V_j{}^C y^a H_{aCB} + \\ &+ \sqrt{g}\psi\left(\mathcal{D}_-\left(y^a A_a\right)\psi + V_-{}^B y^a F_{aB}\right)\big],\end{aligned}$$

ed utilizzando i vincoli (1.51), (1.52)

$$\begin{aligned}\delta I = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma \,\big[&2\sqrt{g}g^{ij} D_i y^a V_{ja} + \varepsilon^{ij} V_i{}^b V_j{}^c y^a T_{cba} + 2\varepsilon^{ij} V_i{}^\beta V_j{}^\gamma y^a (2\Gamma_a)_{\gamma\beta} + \\ &+ \sqrt{g}\psi\mathcal{D}_-\left(y^a A_a\right)\psi - V_-{}^B y^a F_{aB}\big].\end{aligned}$$

Facendo uso dell'identità

$$\varepsilon^{ij} D_i V_j{}^a = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ij} V_i{}^B V_j{}^C T_{CB}{}^a \tag{1.88}$$

ed integrando per parti per rimuovere le derivate dalle y^a, si ottiene poi

$$\delta I = \int d^2\sigma \left[\left(\sqrt{g}g^{ij} + \varepsilon^{ij}\right) y^a D_i V_{ja} + \sqrt{g}\psi y^a A_a \mathcal{D}_-\psi + \frac{1}{2}\sqrt{g}\psi y^a V_-{}^B F_{Ba}\psi\right]$$

e dunque l'equazione del moto

$$D_- V_{+a} + \psi A_a \mathcal{D}_-\psi + \frac{1}{2}\psi V_-{}^B F_{Ba}\psi = \frac{1}{\sqrt{g}} E_a{}^M \frac{\delta I}{\delta Z^M} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a I = 0. \tag{1.89}$$

La variazione dell'azione (1.68) sotto le (1.86) e (1.87) per y^α solamente non nullo dà

$$\delta I = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma \left[2\sqrt{g}g^{ij}V_i{}^B y^\gamma T_{\gamma B}{}^a V_{ja} + \varepsilon^{ij}V_i{}^A V_j{}^B y^\gamma H_{\gamma BA} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{g}\psi\left(\mathcal{D}_-\left(y^\alpha A_\alpha\right) + V_-{}^B y^\gamma F_{\gamma B}\right)\psi\right]$$

ed usando i vincoli (1.51), (1.52),

$$\delta I = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma \left[4\left(\sqrt{g}g^{ij} + \varepsilon^{ij}\right)V_{ia}V_j{}^\alpha y^\beta(\Gamma_a)_{\alpha\beta} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{g}\psi y^\alpha A_\alpha \mathcal{D}_-\psi - 2\sqrt{g}\psi y^\gamma(\Gamma_b)_{\gamma\varepsilon}\chi^\varepsilon\psi\right]$$

e dunque l'equazione del moto

$$\not{V}_{-\alpha\beta}\mathcal{V}_+{}^\beta - \frac{1}{2}\psi A_\alpha \mathcal{D}_-\psi = \frac{1}{\sqrt{g}}E_\alpha{}^M\frac{\delta I}{\delta Z^M} \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha I = 0. \tag{1.90}$$

L'equazione del moto per Ψ si ottiene direttamente,

$$\mathcal{D}_-\psi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\delta I}{\delta\psi} = 0. \tag{1.91}$$

Per quanto riguarda le equazioni del moto per $h_\pm{}^i$, notiamo che dei tre termini costituenti l'azione (1.68), il termine con H non contiene la metrica e quindi non contribuisce. Definiamo

$$V_{ij} = V_i{}^a V_{ja} \tag{1.92a}$$
$$\psi_i = \psi\mathcal{D}_i\psi; \tag{1.92b}$$

usando le relazioni

$$\delta\sqrt{g} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}\left(e_k{}^+ h_+{}^k + e_k{}^- h_-{}^k\right) \tag{1.93a}$$
$$\delta(\sqrt{g}g^{ij}) = \sqrt{g}h_+{}^k\left(\delta_k^{(i}e_-{}^{j)} - \frac{1}{2}e_k{}^+ e_+{}^{(i}e_-{}^{j)}\right) + $$
$$+ \sqrt{g}h_-{}^k\left(\delta_k^{(i}e_+{}^{j)} - \frac{1}{2}e_k{}^- e_+{}^{(i}e_-{}^{j)}\right) \tag{1.93b}$$
$$\delta(\sqrt{g}e_-{}^i) = \sqrt{g}h_-{}^k\left(\delta_k^i - \frac{1}{2}e_k{}^- e_-{}^i\right) - \frac{1}{2}h_+{}^k e_k{}^+ e_-{}^i, \tag{1.93c}$$

conseguenza della (1.86c), si ha

$$\delta I = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma\sqrt{g}\left[h_-{}^k\left(V_{k+} - \frac{1}{2}e_k{}^- V_{+-} - \psi_k + \frac{1}{2}e_k{}^-\psi_-\right) - \right.$$
$$\left. - h_+{}^k\left(V_{k-} - \frac{1}{2}e_k{}^+ V_{+-} + \frac{1}{2}e_k{}^+\psi_-\right)\right]$$

e dunque le equazioni del moto

$$-\frac{2}{\sqrt{g}}e_+{}^k\frac{\delta I}{\delta e_-{}^k} = V_{++} - \psi_+ = V_+^2 - \psi\mathcal{D}_+\psi = 0 \tag{1.94a}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{g}}e_-{}^k\frac{\delta I}{\delta e_+{}^k} = V_{--} = V_-^2 = 0 \tag{1.94b}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{g}}e_-{}^k\frac{\delta I}{\delta e_-{}^k} = V_{-+} - V_{+-} - \psi_- + \psi_- = 0 = 0 \tag{1.94c}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{g}}e_+{}^k\frac{\delta I}{\delta e_+{}^k} = V_{-+} - V_{+-} + \psi_- = \psi\mathcal{D}_-\psi = 0. \tag{1.94d}$$

Le relazioni indipendenti tra le (1.89), (1.90), (1.91) e (1.94) sono

$$D_-V_{+a} + \frac{1}{2}\psi F_{-a}\psi = 0 \tag{1.95a}$$

$$\not{V}_{-\alpha\beta}\mathcal{V}_+{}^\beta = 0 \tag{1.95b}$$

$$\mathcal{D}_-\psi = 0 \tag{1.95c}$$

$$V_-^2 = 0 \tag{1.95d}$$

$$V_+^2 - \psi\mathcal{D}_+\psi = 0, \tag{1.95e}$$

dove indichiamo con F_{-a} l'espressione

$$F_{-a} = V_-{}^B F_{Ba} \equiv V_-{}^b F_{ba} - 2V_-{}^\alpha(\Gamma_a)_{\alpha\beta}\chi^\beta. \tag{1.96}$$

Capitolo 2

Quantizzazione

La formulazione di Green-Schwarz delle superstringhe presenta il considerevole vantaggio di avere supersimmetria a vista nello spazio-tempo di background. La simmetria κ caratteristica di questa formulazione presenta tuttavia alcune proprietà problematiche dal punto di vista della quantizzazione covariante. Infatti: 1) l'algebra delle trasformazioni κ forma un'algebra aperta, 2) essa dà origine ad un sistema riducibile e 3) tale sistema è caratterizzato da un grado di riducibilità infinito.

In presenza di un'algebra aperta la procedura standard di quantizzazione BRST delle teorie di gauge non è più sufficiente, ed è necessario estendere il formalismo con la più completa procedura di quantizzazione ideata da Batalin e Vilkovisky. In Sez. 2.1 descriveremo estesamente tale procedura dal punto di vista formale, e l'ultima parte di questa sezione sarà dedicata all'estensione ai sistemi riducibili con grado finito di riducibilità.

La procedura di Batalin-Vilkovisky per teorie con grado di riducibilità infinito richiede tuttavia un numero infinito di ghosts secondari, e non è ovvio come estendere la procedura in questo caso. Aggireremo questo problema nel prossimo capitolo con un gauge-fixing "operativo" non covariante.

in Sez. 2.2 sarà descritta la procedura di rinormalizzazione perturbativa per teorie con simmetrie locali nel linguaggio di Batalin-Vilkovisky. La regolarizzazione cui faremo riferimento è la Regolarizzazione Dimensionale, secondo cui l'azione classica in D dimensioni è estesa consistentemente in $D = d + \epsilon$ dimensioni, dove ϵ è il parametro che, nel limite in cui va a zero, ripristina la teoria fisica. Il vantaggio di RD in confronto ad altre regolarizzazioni è la sua analiticità: le divergenze della teoria si presentano, nell'ambito di una

rinormalizzazione perturbativa, di volta in volta come poli in ϵ, i cui residui sono azioni locali.

Descriveremo quindi la procedura di rinormalizzazione ad un loop nel caso più semplice in cui la regolarizzazione non rompe le simmetrie presemti nell'azione classica. Successivamente descriveremo invece il caso cui siamo interessati in cui la regolarizzazione rompe le simmetrie dell'azione classica. Se questa rottura non è eliminabile da opportune sottrazioni di controtermini all'azione classica si parlerà di anomalie. L'introduzione della tecnica del "vertice anomalo" per il calcolo delle anomalie conclude la sezione.

La non linearità dei modelli sigma introduce una difficoltà tecnica nel calcolo esplicito a livello quantistico. E' conveniente sviluppare i campi del modello sigma attorno ad una configurazione classica di riferimento $\varphi_0^i = \langle \varphi^i \rangle$ secondo la decomposizione $\varphi^i = \varphi_0^i + \chi^i$ e quantizzare solo le fluttuazioni χ^i. Nel caso del modello sigma di Green-Schwarz è preferibile in effetti una variante di tale metodo nota come sviluppo in coordinate normali. In Sez. 2.3 introdurremo tale sviluppo nel linguaggio di Batalin-Vilkovisky come una particolare trasformazione canonica.

Manterremo per tutto il capitolo la discussione ad un livello generale. L'applicazione al caso di nostro specifico interesse sarà svolta nel prossimo capitolo.

2.1 Quantizzazione di Batalin-Vilkovisky per algebre aperte: schema generale

Il problema che si presenta nella quantizzazione delle teorie di gauge è legato alla degenerazione dell'azione: la somma sulle traiettorie nel path-integral diverge se è presente un'invarianza locale, poiché più configurazioni esprimono la stessa situazione fisica.

Nel caso particolare di teorie dotate di un'algebra di gauge chiusa come le teorie di Yang-Mills la degenerazione è risolta fattorizzando il volume infinito del gruppo di gauge. La formulazione più moderna di tale metodo è la quantizzazione BRST: tale fattorizzazione è svolta formalmente con l'introduzione dei ghosts, e le invarianze locali sono sostituite in questo contesto dall'invarianza globale BRST che governa la struttura della teoria quantistica.

Nel caso di teorie dotate di algebra aperta la quantizzazione BRST è convenientemente generalizzata dalla procedura canonica di quantizzazione sviluppata da Batalin e Vilkovisky in formulazione lagrangiana [5] e da Batalin e Fradkin in formulazione hamiltoniana [7]. La procedura da essi sviluppata è di un'elevata eleganza formale: l'invarianza BRST ha in questo ambito un significato più chiaro ed indipendente dalle condizioni di gauge.

La procedura di Batalin-Vilkovisky è stata successivamente estesa a teorie *riducibili* [6]. In tali teorie, i vincoli sono linearmente dipendenti, e quindi i ghosts introdotti dalla procedura sono ridondanti: nell'ambito della procedura BV-BRST risulta perciò necessario introdurre dei ghosts ulteriori, i "ghosts di ghosts". Una teoria può essere 1-riducibile, nel qual caso il problema è risolto con l'introduzione di un'unica serie di ghosts di ghosts: nel caso generale n-riducibile questi non sono sufficienti e risulta necessario introdurre ulteriori *generazioni* di ghosts. La superstringa di Green-Schwarz è una teoria riducibile, più precisamente infinito-riducibile. La sequenza di operazioni di cui è composta la procedura di Batalin-Vilkovisky è la seguente:

1. descrizione del settore minimale $\phi^{\mathcal{A}}$ dei campi e dei ghosts, introduzione dei relativi anticampi $\phi^*_{\mathcal{A}}$ e delle antiparentesi $\big(\ ,\ \big)$;
2. soluzione della *master equation* $\big(S\,,\,S\big) = 0$ per l'azione estesa $S[\phi, \phi^*]$ soggetta ad opportune condizioni al contorno;
3. aggiunta del settore non minimale;
4. gauge-fixing.

Tali operazioni saranno descritte in dettaglio nelle sottosezioni seguenti.

2.1.1 Ghosts e variazioni BRST

La procedura di Batalin-Vilkovisky è una generalizzazione off-shell della procedura BRST, in cui sono aggiunti campi ausiliari (gli anticampi) grazie ai quali è possibile introdurre opportune trasformazioni BV-BRST che sono nilpotenti off-shell anche se l'algebra è aperta (l'algebra è aperta se le trasformazioni BRST sono nilpotenti solo on-shell).

Sia dato un sistema dinamico descritto dai campi $\varphi^i(x)$ di statistica $\epsilon(\varphi^i) = \epsilon(i)$, ed $I[\varphi]$ sia l'azione classica. Detti $\xi^\alpha(x)$ i parametri locali di gauge, di statistica $\epsilon(\xi^\alpha) = \epsilon(\alpha)$,

siano

$$\delta\varphi^i = \xi^\alpha \mathcal{E}_\alpha{}^i \tag{2.1}$$

le invarianze cui è soggetta l'azione $I[\varphi]$ dove le quantità $\mathcal{E}_\alpha{}^i$, dette generatori della trasformazione, sono funzioni dei campi φ^i.

Assumeremo che (2.1) sia la più generale trasformazione locale rispetto alla quale I è invariante, modulo termini nulli on-shell. Si noti che l'azione I è sempre invariante sotto le trasformazioni locali banali proporzionali alle equazioni del moto

$$\delta\varphi^i = \chi^{ij}\partial_j I, \tag{2.2}$$

dove χ^{ij} è antisimmetrico in ij.

Alle invarianze (2.1) corrispondono a livello quantistico le invarianze globali BRST dove ai parametri di gauge $\xi^\alpha(x)$ si sostituiscono i ghosts $c^\alpha(x)$ di Fadeev-Popov, che sono essi stessi soggetti alla variazione BRST. Alla (2.1) corrispondono dunque le variazioni

$$s\varphi^i = c^\alpha \mathcal{E}_\alpha{}^i \tag{2.3a}$$

$$sc^\alpha = \frac{1}{2} c^\gamma c^\beta \mathcal{T}_{\beta\gamma}{}^\alpha \tag{2.3b}$$

dove $\mathcal{T}_{\beta\gamma}{}^\alpha$ sono le funzioni di struttura dell'algebra di gauge.

Il differenziale geometrico d induce naturalmente un grading nello spazio delle n-forme che è definito contando la molteplicità delle vielbein E^A nelle forme differenziali. Allo stesso modo la variazione BRST s induce naturalmente il grading g detto numero di ghost che vale 1 per i ghosts c^α (di primo livello; il caso di teorie riducibili verrà trattato più avanti). I ghosts in questo ambito rivestono il ruolo di "vielbein quantistiche". Le convenzioni che useremo per la variazione BRST s e per le leggi di anticommutazione dei ghosts sono le stesse che usiamo per il differenziale geometrico d e le relative leggi di anticommutazione delle vielbein. In particolare, consideriamo il numero di ghost g un grading separato dalla statistica intrinseca cosicché, analogamente alla legge di anticommutazione graduata

$$E^A E^B = -(-)^{AB} E^B E^A \tag{2.4}$$

i ghosts soddisfano alla

$$c^\alpha c^\beta = -(-)^{\alpha\beta} c^\beta c^\alpha; \tag{2.5}$$

per enti X^α di numero di ghost $g(X)$ scriveremo più in generale

$$X^\alpha X^\beta = (-)^{g(X)}(-)^{\alpha\beta} X^\beta X^\alpha. \tag{2.6}$$

Useremo le notazioni $[\cdots)$ e $(\cdots]$ che indicano rispettivamente antisimmetrizzazione e simmetrizzazione BRST-graduata. La relazione (2.6) la scriveremo ad esempio $X^{(\alpha} X^{\beta]} = 0$. Il differenziale BRST s agisce da destra come il differenziale geometrico d. Se l'algebra delle invarianze (2.1) è chiusa l'analogia tra d ed s è completa, poiché, come vale (localmente) l'identità $d^2 = 0$, vale la nilpotenza BRST (off-shell)

$$s^2 = 0. \tag{2.7}$$

In tal caso si ha in generale, detti ξ_1^α e ξ_2^α due parametri di gauge, la relazione

$$[\delta_{\xi_1}, \delta_{\xi_2}]\varphi^i = \delta_{\xi_1 \times \xi_2}\varphi^i \tag{2.8}$$

dove $(\xi_1 \times \xi_2)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\xi_1^\gamma \xi_2^\beta \mathcal{T}_{\beta\gamma}{}^\alpha$ esprime la regola di composizione dell'algebra di gauge tramite le funzioni di struttura $\mathcal{T}_{\beta\gamma}{}^\alpha$. Esplicitando la (2.8) tramite le $\mathcal{E}_\alpha{}^i$ si ha ($\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$)

$$\left(\mathcal{E}_\beta{}^j \partial_j \mathcal{E}_\gamma{}^i - (-)^{\beta\gamma} \mathcal{E}_\beta{}^j \partial_j \mathcal{E}_\gamma{}^i\right) \xi_1^\gamma \xi_2^\beta = \mathcal{T}_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathcal{E}_\alpha{}^i \xi_1^\gamma \xi_2^\beta \tag{2.9}$$

ovvero

$$\mathcal{E}_{[\beta}{}^j \partial_j \mathcal{E}_{\gamma]}{}^i = \frac{1}{2} \mathcal{T}_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathcal{E}_\alpha{}^i, \tag{2.10}$$

e tale relazione permette di ricavare le variazioni BRST dei ghosts c^α in conseguenza delle (2.7).

Naturalmente l'analogia tra la variazione BRST ed il differenziale geometrico d si riduce quando passiamo a considerare algebre aperte. Infatti in tal caso l'identità (2.7), ovvero le (2.8), non valgono più, ed a secondo membro delle (2.8) compaiono dei termini addizionali. Tali termini sono comunque sempre proporzionali alle equazioni del moto. Quando l'algebra delle invarianze dell'azione è aperta le trasformazioni banali (2.2) fanno la loro comparsa a secondo membro delle (2.10), cosicché

$$\mathcal{E}_{[\beta}{}^j \partial_j \mathcal{E}_{\gamma]}{}^i = \frac{1}{2} \mathcal{T}_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathcal{E}_\alpha{}^i + \chi_{\beta\gamma}{}^{ij} \partial_j I \tag{2.11}$$

dove $\chi_{\beta\gamma}{}^{ij}$ sono delle funzioni dipendenti dai campi φ^i, dotate di antisimmetria graduata nelle coppie di indici ij ed $\alpha\beta$. Infatti dall'invarianza BRST dell'azione

$$sI = s\varphi^i \partial_i I = c^\alpha \mathcal{E}_\alpha{}^i \partial_i I = 0 \tag{2.12}$$

segue $s^2 I = 0$: esplicitando,

$$\begin{aligned} s^2 I &= s(s\varphi^i \partial_i I) \\ &= s^2\varphi^i \partial_i I + s\varphi^i s\varphi^j \partial^2_{ji} I. \end{aligned}$$

Il secondo termine di questa equazione si annulla perché $\partial^2_{ij} I$ è simmetrico in senso graduato in ij, mentre $s\varphi^i s\varphi^j$ è antisimmetrico. Espandendo $s^2\varphi^i$, si ha

$$s^2 I = c^\beta c^\alpha \mathcal{E}_{[\alpha}{}^j \partial_j \mathcal{E}_{\beta]}{}^i \partial_i I \tag{2.13}$$

e poiché, come si è detto, (2.1) è la più generale trasformazione locale sotto cui I è invariante, modulo termini della forma (2.2), dalla (2.13) si ha

$$s^2 I = (\frac{1}{2} c^\gamma c^\beta \mathcal{T}_{\beta\gamma}{}^\alpha)\mathcal{E}_\alpha{}^i \partial_i I + c^\gamma c^\beta \chi_{\beta\gamma}{}^{ij} \partial_j I \partial_i I; \tag{2.14}$$

il primo termine è nullo grazie alla (2.12), mentre il secondo termine si annulla per le proprietà di antisimmetria graduata di $\chi_{\beta\gamma}{}^{ij}$. In conseguenza delle (2.11) le variazioni BRST sono quindi nilpotenti, anche se solo on-shell:

$$\begin{aligned} s^2\varphi^i &= c^\beta c^\alpha \mathcal{E}_\alpha{}^j \partial_j \mathcal{E}_\beta{}^i - \frac{1}{2} c^\beta c^\alpha \mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^\gamma \mathcal{E}_\gamma{}^i \\ &= c^\beta c^\alpha \chi_{\alpha\beta}{}^{ij} \partial_j I, \end{aligned} \tag{2.15}$$

ovvero

$$s^2 = 0 \qquad \text{on-shell.} \tag{2.16}$$

Nelle ordinarie teorie di gauge il termine a secondo membro della (2.2) non è presente per ragioni dimensionali, ed è questo il motivo per cui in tali teorie l'algebra chiude off-shell.

2.1.2 Anticampi, antiparentesi e trasformazioni canoniche

Indichiamo con

$$\phi^{\mathcal{A}} = (\varphi^i(x), c^\alpha(x)) \tag{2.17}$$

l'insieme *minimale* di campi e ghosts, dove l'indice $\mathcal{A}$ corre anche sulle x continue; le relazioni di commutazione sono

$$\phi^i \phi^j = (-)^{ij} \phi^j \phi^j \tag{2.18a}$$

$$c^\alpha c^\beta = -(-)^{\alpha\beta} c^\beta c^\alpha \tag{2.18b}$$

che riassumeremo nella

$$\phi^{\mathcal{A}}\phi^{\mathcal{B}} = (-)^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\phi^{\mathcal{B}}\phi^{\mathcal{A}} \tag{2.19}$$

intendendo

$$(-)^{\mathcal{A}\mathcal{B}} \equiv (-)^{\epsilon(\mathcal{A})\epsilon(\mathcal{B})+g(\mathcal{A})g(\mathcal{B})}.$$

In qualità di variabili canonicamente coniugate ai campi $\phi^{\mathcal{A}}$ si introducono gli *anticampi*

$$\phi^*_{\mathcal{A}} = (\varphi^*_i(x), c^*_\alpha(x)) \tag{2.20}$$

della stessa statistica intrinseca dei relativi campi $\phi^{\mathcal{A}}$, $\epsilon(\phi^*_{\mathcal{A}}) = \epsilon(\phi^{\mathcal{A}})$, ma con numero di ghost

$$g(\phi^*_{\mathcal{A}}) = -g(\phi^{\mathcal{A}}) - 1; \tag{2.21}$$

e dunque c^*_α ha numero di ghost -2, e ϕ^*_i -1. Le relazioni di anticommutazione sono ora

$$\varphi^*_i\varphi^*_j = -(-)^{ij}\varphi^*_j\varphi^*_j \tag{2.22a}$$

$$c^*_\alpha c^*_\beta = (-)^{\alpha\beta}c^*_\beta c^*_\alpha \tag{2.22b}$$

ovvero

$$\phi^*_{\mathcal{A}}\phi^*_{\mathcal{B}} = -(-)^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\phi^*_{\mathcal{B}}\phi^*_{\mathcal{A}}. \tag{2.23}$$

I funzionali del sistema dipendono ora da ϕ e ϕ^*, e le parentesi di Poisson divengono *antiparentesi*, per via della statistica discorde tra ϕ e ϕ^*:[1]

$$\big(F\,,\,G\big) \stackrel{\text{def}}{=} F\left(\overleftarrow{\partial}_{\mathcal{A}}\overrightarrow{\partial}^{\mathcal{A}} + (-)^{\mathcal{A}}\,\overleftarrow{\partial}^{\mathcal{A}}\overrightarrow{\partial}_{\mathcal{A}}\right)G \tag{2.24}$$

dove abbiamo introdotto le derivate funzionali destre e sinistre dei campi $\phi^{\mathcal{A}}$ e degli anticampi $\phi^*_{\mathcal{A}}$

$$\overrightarrow{\partial}_{\mathcal{A}} \equiv \partial_{\mathcal{A}} = \frac{\delta}{\delta\phi^{\mathcal{A}}}, \qquad \overleftarrow{\partial}_{\mathcal{A}} = \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^{\mathcal{A}}} \tag{2.25a}$$

$$\overrightarrow{\partial}^{\mathcal{A}} \equiv \partial^{\mathcal{A}} = \frac{\delta}{\delta\phi^*_{\mathcal{A}}}, \qquad \overleftarrow{\partial}^{\mathcal{A}} = \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi^*_{\mathcal{A}}}. \tag{2.25b}$$

[1] Qui e nel seguito è sottintesa la sommatoria sugli indici discreti e l'integrale su quelli continui. Le derivate sono intese come derivate funzionali qualora siano presenti indici continui.

Le derivate destre sono collegate a quelle sinistre dalle relazioni

$$F\overset{\leftarrow}{\partial}_{\mathcal{A}} = (-)^{(F+1)A}\partial_{\mathcal{A}}F \tag{2.26a}$$

$$F\overset{\leftarrow\mathcal{A}}{\partial} = (-)^{(F+1)A+g(F)+1}\partial^{\mathcal{A}}F; \tag{2.26b}$$

per esse vale la regola di Leibnitz per la derivata (sinistra e destra) del prodotto

$$\partial_{\mathcal{A}}(FG) = (\partial_{\mathcal{A}}F)G + (-)^{\mathcal{A}F}F(\partial_{\mathcal{A}}G) \tag{2.27a}$$

$$(FG)\overset{\leftarrow}{\partial}_{\mathcal{A}} = (-)^{(F+1)(G+1)\mathcal{A}}\Big(F(G\overset{\leftarrow}{\partial}_{\mathcal{A}}) + (-)^{\mathcal{A}G}(F\overset{\leftarrow}{\partial}_{\mathcal{A}})G\Big). \tag{2.27b}$$

In conseguenza della (2.24) si hanno le utili identità

$$\big(\phi^{\mathcal{A}}\,,\,G\big) = \partial^{\mathcal{A}}G, \qquad \big(F\,,\,\phi^{\mathcal{A}}\big) = (-)^{\mathcal{A}}F\overset{\leftarrow\mathcal{A}}{\partial} \tag{2.28a}$$

$$\big(\phi^*_{\mathcal{A}}\,,\,G\big) = (-)^{\mathcal{A}}\partial_{\mathcal{A}}G, \qquad \big(F\,,\,\phi^*_{\mathcal{A}}\big) = F\overset{\leftarrow}{\partial}_{\mathcal{A}}\,. \tag{2.28b}$$

Esplicitamente la definizione delle antiparentesi (2.24) è dunque

$$\big(F\,,\,G\big) = (-)^{(F+1)\mathcal{A}}\left(\frac{\delta F}{\delta\phi^{\mathcal{A}}}\frac{\delta G}{\delta\phi^*_{\mathcal{A}}} + (-)^{g(F)}\frac{\delta F}{\delta\phi^*_{\mathcal{A}}}\frac{\delta G}{\delta\phi^{\mathcal{A}}}\right). \tag{2.29}$$

Le antiparentesi sono commutanti per F e G bosonici, a differenza delle parentesi di Poisson ordinarie. Le antiparentesi hanno simmetria graduata

$$\big(F\,,\,G\big) = (-)^{FG+g(F)g(G)+g(F)+g(G)}\big(G\,,\,F\big), \tag{2.30a}$$

vale l'identità di Jacobi

$$(-)^{FH+g(F)g(H)+g(G)}\big(F\,,\,\big(G\,,\,H\big)\big) + \text{ciclica} = 0 \tag{2.30b}$$

e vale la regola di Leibnitz rispetto al prodotto,

$$\big(F\,,\,GH\big) = \big(F\,,\,G\big)H + (-)^{FG+g(F)g(G)+g(G)}G\big(F\,,\,H\big) \tag{2.31a}$$

$$\begin{aligned}\big(FG\,,\,H\big) = (-)^{FGH+(g(F)+1)(g(G)+1)(g(H)+1)+1}\Big[&(F\big(G\,,\,H\big)+\\ &+(-)^{GH+g(G)g(H)+g(G)}\big(F\,,\,H\big)G\Big);\end{aligned} \tag{2.31b}$$

$$\tag{2.31c}$$

il numero di ghost delle antiparentesi è $g\left(\big(F\,,\,G\big)\right) = g(F) + g(G) - 1$. Dalle proprietà (2.30) discendono due importanti conseguenze: se B è un funzionale bosonico con numero di ghost zero, in generale

$$\big(B\,,\,B\big) \neq 0 \tag{2.32}$$

a differenza di quanto avviene per le parentesi di Poisson. Inoltre, per un qualsiasi funzionale H con numero di ghost zero

$$\big(B\,,\,\big(B\,,\,H\big)\big) = -\frac{1}{2}\big(\big(B\,,\,B\big)\,,\,H\big). \tag{2.33}$$

Come vedremo, è proprio questa relazione che permette di costruire una generalizzazione valida off-shell delle trasformazioni BRST.

Le trasformazioni canoniche nell'ambito della procedura di Batalin-Vilkovisky sono, analogamente al caso della meccanica analitica ordinaria, trasformazioni

$$\phi, \phi^* \to \phi', \phi'^*$$

tali che vengano conservate le antiparentesi canoniche

$$\big(\phi^{\mathcal{A}}\,,\,\phi^{\mathcal{B}}\big) = 0 \tag{2.34a}$$

$$\big(\phi^*_{\mathcal{A}}\,,\,\phi^*_{\mathcal{B}}\big) = 0 \tag{2.34b}$$

$$\big(\phi^{\mathcal{A}}\,,\,\phi^*_{\mathcal{B}}\big) = \delta^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}; \tag{2.34c}$$

tali trasformazioni sono individuate dalla funzione generatrice $G[\phi, \phi'^*]$ con numero di ghost -1 secondo le relazioni

$$\phi'^{\mathcal{A}} = \frac{\delta G}{\delta \phi'^*_{\mathcal{A}}} \tag{2.35a}$$

$$\phi*_{\mathcal{A}} = (-)^{\mathcal{A}} \frac{\delta G}{\delta \phi^{\mathcal{A}}}. \tag{2.35b}$$

Per trasformazioni infinitesime possiamo scrivere

$$G[\phi, \phi'^*] = \phi'^*_{\mathcal{A}} \phi^{\mathcal{A}} + F[\phi, \phi'^*], \tag{2.36}$$

dove si è introdotto il generatore F della trasformazione

$$\begin{aligned} \delta_F \phi^{\mathcal{A}} &= \big(\phi^{\mathcal{A}}\,,\,F\big) \\ \delta_F \phi^*_{\mathcal{A}} &= \big(\phi^*_{\mathcal{A}}\,,\,F\big). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Applicando la proprietà di Jacobi (2.30b) si può verificare esplicitamente che tale trasformazione lascia invariate le antiparentesi canoniche (2.34).

2.1.3 Azione estesa e master equation

Si introduce il funzionale bosonico $S[\phi, \phi^*]$ come una particolare estensione dell'azione classica $I[\varphi]$ soggetta alla *master equation*

$$\big(S\,,\,S\big) = 0. \tag{2.38}$$

L'*azione estesa* $S[\phi, \phi^*]$ può essere sviluppata ordine per ordine negli anticampi ϕ^*

$$S = S_0 + S_1 + S_2 + \cdots \tag{2.39}$$

dove

$$S_n[\phi, \phi^*] = \frac{1}{n!}\phi^*_{\mathcal{A}_1} \cdots \phi^*_{\mathcal{A}_n} S^{\mathcal{A}_1 \cdots \mathcal{A}_n}[\phi]; \tag{2.40}$$

i coefficienti $S^{\mathcal{A}_1 \cdots \mathcal{A}_n}$ sono antisimmetrici in senso graduato negli indici $\mathcal{A}_1 \cdots \mathcal{A}_n$: in particolare,

$$S^{\mathcal{A}\mathcal{B}} = -(-)^{\mathcal{A}\mathcal{B}} S^{\mathcal{B}\mathcal{A}}. \tag{2.41}$$

L'azione estesa deve sottostare alle condizioni al contorno

$$S_0[\phi] = I[\varphi] \tag{2.42a}$$

$$S^i[\phi] = s\varphi^i, \tag{2.42b}$$

dove s è la variazione BRST, e $s\varphi^i = c^\alpha \mathcal{E}_\alpha{}^i$. In virtù della (2.42a) scriveremo talvolta, per brevità,

$$S[\phi, \phi^*] = I[\varphi] + \phi^*_{\mathcal{A}} \Delta^{\mathcal{A}}[\phi, \phi^*]. \tag{2.43}$$

Grazie alle condizioni (2.42), la master equation $\big(S\,,\,S\big) = 0$ ha una soluzione univoca: servendoci dello sviluppo in serie (2.39) esplicitiamo le relazioni che si ottengono ordine per ordine negli anticampi; poiché

$$\big(S\,,\,S\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \big(S_p\,,\,S_{n-p}\big), \tag{2.44}$$

la master equation è in componenti

$$\big(S_0\,,\,S_n\big) + \big(S_1\,,\,S_{n-1}\big) + \cdots + \big(S_1\,,\,S_{n-1}\big) + \big(S_0\,,\,S_n\big) = 0. \tag{2.45}$$

Per $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ queste relazioni sono

$$\big(S_0\,,\,S_0\big) = 0 \tag{2.46a}$$

$$2\big(S_0\,,\,S_1\big) = 0 \tag{2.46b}$$

$$2\big(S_0\,,\,S_2\big) + \big(S_1\,,\,S_1\big) = 0 \tag{2.46c}$$

$$2\big(S_0\,,\,S_3\big) + 2(S_1, S_2) = 0 \tag{2.46d}$$

$$\vdots$$

La prima, $\big(S_0\,,\,S_0\big) = 0$, è un'identità, poiché $S_0[\phi, \phi^*] \equiv I[\varphi]$ e quindi S_0 non dipende dagli anticampi ϕ^*. La seconda relazione, $\big(S_0\,,\,S_1\big) = 0$, è di contenuto evidente una volta imposte le condizioni al contorno (2.42): infatti

$$\begin{aligned}\big(S_0\,,\,S_1\big) &= \big(I\,,\,\varphi_i^* S^i + c_\alpha^* S^\alpha\big)\\ &= s\varphi^i \partial_i I\\ &= sI \equiv 0,\end{aligned} \tag{2.47}$$

poiché I non dipende dai ghosts c^α. La (2.46b) esprime dunque l'invarianza BRST dell'azione classica. Nella terza relazione, la (2.46c), compaiono per la prima volta i coefficienti di non chiusura $S^{\mathcal{AB}}$. Esplicitando le antiparentesi ed usando le (2.31), la (2.46c) diviene

$$2\phi^*_{\mathcal{B}} S^{\mathcal{BA}} \partial_{\mathcal{A}} I + 2\phi^*_{\mathcal{B}} S^{\mathcal{A}} \partial_{\mathcal{A}} S^{\mathcal{B}} = 0. \tag{2.48}$$

Utilizziamo ora la condizione $S^i = s\varphi^i$ e la *definizione* della variazione BRST dei ghosts

$$sc^\alpha \equiv S^\alpha, \tag{2.49}$$

che indichiamo collettivamente con

$$S^{\mathcal{A}} = s\phi^{\mathcal{A}}, \tag{2.50}$$

cosicché la (2.48) diviene

$$s^2 \phi^{\mathcal{A}} = -S^{\mathcal{AB}} \partial_{\mathcal{B}} I \tag{2.51}$$

ovvero

$$s^2 \varphi^i = -S^{ij} \partial_j I \tag{2.52a}$$

$$s^2 c^\alpha = -S^{\alpha j} \partial_j I. \tag{2.52b}$$

La (2.52a), confrontata con la (2.15), ci dà le S^{ij} in termini delle funzioni di chiusura on-shell dell'algebra ${\chi_{\alpha\beta}}^{ij}$:

$$S^{ij} = -\frac{1}{2} c^\alpha c^\beta {\chi_{\alpha\beta}}^{ij}. \tag{2.53}$$

La (2.52b) ci permette poi di calcolare i coefficienti $S^{\alpha j}$ e le variazioni BRST dei ghosts c^α. I coefficienti $S^{\alpha\beta}$ non compaiono nella (2.51); le componenti $S^{\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_n}$ che contengono indici di ghost vengono risolte utilizzando relazioni di ordine superiore a quelle necessarie per risolvere in $S^{i_1,\cdots,i_n}$.

Salendo ancora di ordine si trova la (2.46c), che in componenti è

$$sS^{\mathcal{AB}} = 2S^{[\mathcal{AC}}\partial_{\mathcal{C}}(s\phi^{\mathcal{B}]}) - S^{\mathcal{AB}j}\partial_j I, \tag{2.54}$$

grazie alla quale si ottengono $S^{\alpha\beta}$, $S^{\alpha jk}$ ed S^{ijk}; la procedura va quindi avanti, salendo ulteriormente di ordine, in linea di principio indefinitamente. In effetti normalmente la procedura si arresta ai primi due o tre ordini negli anticampi, cioè da un certo punto in poi $S_n = 0$ essenzialmente per ragioni dimensionali.

2.1.4 Coomologia BRST

Facciamo in questa sottosezione una breve digressione sulla variazione BRST, la sua estensione nel formalismo di Batalin-Vilkovisky e la sua coomologia. Nelle nostre convenzioni, la variazione BRST s agisce da destra e si comporta come il differenziale d; le proprietà che caratterizzano l'operatore s sono

$$sF = (-)^{g(F)} s\phi^{\mathcal{A}} \partial_{\mathcal{A}} F \tag{2.55a}$$

$$s^2\phi^{\mathcal{A}} = 0 \qquad \textit{on-shell} \tag{2.55b}$$

$$s(FG) = F(sG) + (-)^{g(G)}(sF)G. \qquad (s \text{ agisce da destra}) \tag{2.55c}$$

Notiamo ora che se definiamo la trasformazione generalizzata $\mathbf{s}$ come

$$\mathbf{s}F \stackrel{\text{def}}{=} \big(F\,,\,S\big), \tag{2.56}$$

l'operatore $\mathbf{s}$ ha le stesse proprietà di s:

$$\mathbf{s}F = (-)^{g(F)} \mathbf{s}\phi^{\mathcal{A}} \partial_{\mathcal{A}} F \qquad \text{per } F \equiv F[\phi] \tag{2.57a}$$

$$\mathbf{s}^2\phi^{\mathcal{A}} = 0 \tag{2.57b}$$

$$\mathbf{s}(FG) = F(\mathbf{s}G) + (-)^{g(G)}(\mathbf{s}F)G. \tag{2.57c}$$

Naturalmente la (2.57b) è più forte della (2.55b), in quanto valida off-shell; la (2.57b) si dimostra grazie all'identità (2.33), per $B = S$ ed usando la master equation. La (2.57c) si dimostra invece facendo uso della proprietà distributiva (2.31b). L'operatore $\mathbf{s}$ è in effetti la generalizzazione off-shell della variazione BRST s:

$$sF = \mathbf{s}F\big|_{\phi^*=0}. \tag{2.58}$$

Diciamo *azione locale* un funzionale scalare locale di ϕ e ϕ^*. Diciamo poi $\mathcal{V}_n$ lo spazio delle azioni locali con numero di ghost n: l'operatore $\mathbf{s}$ mappa $\mathcal{V}_n$ in $\mathcal{V}_{n+1}$. La coomologia dell'operatore $\mathbf{s}$ nello spazio delle azioni locali con numero di ghost n $\mathcal{V}_n$ definisce la coomologia BRST in $\mathcal{V}_n$ tramite l'equazione

$$\mathbf{s}Z_n = 0, \tag{2.59}$$

dove $Z_n \in \mathcal{V}_n$. La coomologia dell'operatore $s = \mathbf{s}\big|_{\mathcal{U}_n}$ nella restrizione $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{V}_n$ delle azioni locali non dipendenti da ϕ^* definisce invece la coomologia *debole* BRST, che vale solo on-shell. La soluzione generale del problema coomologico (2.59) è

$$Z_n = X_n + \mathbf{s}F_{n-1} \tag{2.60}$$

dove X_n è il cociclo non banale, ed $\mathbf{s}F_{n-1}$ è il cociclo banale. Nel linguaggio di Batalin-Vilkovisky il cociclo banale $\mathbf{s}F_{n-1}$ rappresenta una trasformazione canonica, come si è visto precedentemente (Sez. 2.1.2). Il cociclo non banale X_n è esprimibile ordine per ordine negli anticampi come somma di cocicli BRST inequivalenti. Nello spazio $\mathcal{V}_0$ delle azioni locali con numero di ghost zero, si può scrivere

$$X_0[\phi, \phi^*] = \sum_r g_{0r} I_r[\varphi] + o(\phi^*), \tag{2.61}$$

dove g_{0r} sono costanti, e $I_r[\varphi]$ sono cocicli non banali inequivalenti della coomologia debole BRST di $\mathcal{U}_0$; tale coomologia è fondamentale nella rinormalizzazione. Nello spazio delle azioni locali con numero di ghost 1, $\mathcal{V}_1$,

$$X_1[\phi, \phi^*] = \sum_p \omega_p \mathcal{A}_p[\phi] + o(\phi^*), \tag{2.62}$$

dove ω_p sono costanti e $\mathcal{A}_p[\phi]$ sono i cocicli non banali inequivalenti della coomologia debole BRST di $\mathcal{U}_1$. Come verdemo, lo studio delle anomalie di gauge è essenzialmente l'analisi di tale coomologia.

2.1.5 Gauge fixing

La procedura di Batalin-Vilkovisky impone ora l'introduzione del *settore non minimale* rappresentato dagli antighosts b_α e dai campi ausiliari di Nakanishi-Lautrup λ_α con numero di ghost rispettivamente -1 e 0. Ad ad essi si associano poi i relativi anticampi $b^{*\alpha}$, $\lambda^{*\alpha}$ con numero di ghost 0 e -1 rispettivamente. Il settore non minimale comporta l'aggiunta all'azione estesa del termine banale addizionale

$$S_{\text{triv}} = \int dx b^{*\alpha} \lambda_\alpha \tag{2.63}$$

cui corrisponde la

$$s b_\alpha = \lambda_\alpha; \tag{2.64}$$

il sistema è ora descritto dai campi $\phi^{\mathcal{A}} = (\varphi^i(x), c^\alpha(x), b_\alpha(x), \lambda_\alpha(x))$, dai relativi anticampi $\phi^*_{\mathcal{A}} = (\varphi^*_i(x), c^*_\alpha(x), b^{*\alpha}(x), \lambda^{*\alpha}(x))$, e dall'azione estesa $S_{\text{nm}} = S + S_{\text{triv}}$. Il gauge-fixing è in questo contesto una particolare trasformazione canonica in cui il generatore $\Psi[\phi]$, detto fermione di gauge, non dipende dagli anticampi, ed è tale che la suddetta trasformazione canonica elimini completamente l'invarianza di gauge. Poiché Ψ non dipende dagli anticampi, la trasformazione di gauge-fixing è semplicemente

$$\delta_{\text{gf}} \phi^*_{\mathcal{A}} = \left(\phi^*_{\mathcal{A}}\,,\, \Psi\right) = \Psi \overleftarrow{\partial}_{\mathcal{A}} \,. \tag{2.65}$$

Con la trassormazione canonica generata da Ψ applicata all'azione estesa non minimale S_{nm} otteniamo dunque l'azione estesa a gauge fissata $S_{\text{gf}} = I_{\text{gf}} + o(\phi^*)$. La procedura di gauge-fixing appena descritta è equivalente on-shell all'aggiunta all'azione estesa della variazione BRST del fermione di gauge:

$$S_{\text{gf}} = S + s\Psi. \tag{2.66}$$

Se $\Psi = \psi^\alpha b_\alpha$, le consuete condizioni di gauge sono $\psi^\alpha = 0$. La trasformazione (2.65) diviene in tal caso lo shift

$$\begin{aligned} \delta_{\text{gf}} b^{*\alpha} &= \psi^\alpha \\ \delta_{\text{gf}} \lambda^{*\alpha} &= 0, \end{aligned} \tag{2.67}$$

e poiché l'unica dipendenza da $b^{*\alpha}$ dell'azione estesa è contenuta in (2.63), compare in conseguenza di questo shift il termine $\lambda_\alpha \psi^\alpha$ nell'azione estesa. I campi λ_α svolgono di conseguenza il ruolo di campi moltiplicatori relativi alle condizioni di gauge $\psi^\alpha = 0$.

2.1.6 Teorie riducibili

Una teoria *riducibile* è caratterizzata dalle relazioni

$$Z_{\alpha_2}{}^{\alpha}\mathcal{E}_{\alpha}{}^{i} = 0 \tag{2.68}$$

dove $Z_{\alpha_2}{}^{\alpha}$ è la matrice locale dei *modi zero* ed $\mathcal{E}_{\alpha}{}^{i}$, ricordiamo, è la matrice che descrive le invarianze di gauge (2.1) dell'azione classica $I[\varphi]$. Il significato delle (2.68) è che le invarianze di gauge non sono tra loro indipendenti. Modificando i parametri di gauge con la trasformazione di secondo livello

$$\delta_2\xi^{\alpha} = \xi_2^{\alpha_2} Z_{\alpha_2}{}^{\alpha}, \tag{2.69}$$

le invarianze indotte dai parametri ξ^{α} risultano non modificate:

$$\begin{aligned}\delta_2(\delta\varphi^i) &= \delta_2\xi^{\alpha}\mathcal{E}_{\alpha}{}^{i} \\ &= \xi_2^{\alpha_2}(Z_{\alpha_2}{}^{\alpha}\mathcal{E}_{\alpha}{}^{i}) = 0,\end{aligned} \tag{2.70}$$

e poiché ad ogni invarianza locale corrispondono dei ghosts, ciò significa che sono necessari, oltre ai ghosts c^{α}, dei ghosts $c_2^{\alpha_2}$ di secondo livello.[2]

Nel caso generale di una teoria n-riducibile, i modi zero $Z_{\alpha_2}{}^{\alpha}$ sono soggetti a relazioni analoghe a quelle delle $\mathcal{E}_{\alpha}{}^{i}$: modulo le equazioni del moto

$$Z_{\alpha_3}{}^{\alpha_2} Z_{\alpha_2}{}^{\alpha} = 0, \tag{2.71}$$

a loro volta gli $Z_{\alpha_3}{}^{\alpha_2}$ hanno dei modi zero, e così via per n livelli,

$$Z_{\alpha_{p+2}}{}^{\alpha_{p+1}} Z_{\alpha_{p+1}}{}^{\alpha_p} = 0, \qquad 0 \le p \le n-1 \quad , \tag{2.72}$$

dove abbiamo incluso anche la relazione (2.68), intendendo $\alpha_1 \equiv \alpha$, $\alpha_0 \equiv i$, e $Z_{\alpha_1}{}^{\alpha_0} \equiv \mathcal{E}_{\alpha}{}^{i}$. Vi sono quindi n generazioni di ghosts che indichiamo con c^{α_p}, con numero di ghost $g(c^{\alpha_p}) = p$, ed intendendo $c^{\alpha_1} \equiv c^{\alpha}$. Le variazioni BRST per una teoria riducibile sono

$$s\varphi^i = c^{\alpha}\mathcal{E}_{\alpha}{}^{i} \tag{2.73a}$$

$$sc^{\alpha} = \frac{1}{2}c^{\beta}c^{\gamma}\mathcal{T}_{\gamma\beta}{}^{\alpha} + c^{\alpha_2}Z_{\alpha_2}{}^{\alpha} \tag{2.73b}$$

$$sc^{\alpha_2} = \frac{1}{3!}c^{\beta}c^{\gamma}c^{\delta}\mathcal{T}_{\delta\gamma\beta}{}^{\alpha_2} + \frac{1}{2}c^{\beta_2}c^{\gamma}\mathcal{H}_{\gamma\beta_2}{}^{\alpha_2} + c^{\alpha_3}Z_{\alpha_3}{}^{\alpha_2} \tag{2.73c}$$

$$\vdots$$

[2] In seguito sottintenderemo l'indice di generazione per non appesantire la notazione, cosicché $c^{\alpha_p} \equiv c_p^{\alpha_p}$, e $Z_{\alpha_p}{}^{\alpha_{p-1}} \equiv Z_{p,\alpha_p}{}^{\alpha_{p-1}}$

Tali variazioni sono dunque caratterizzate dalla proprietà

$$\frac{\delta(sc^{\alpha_p})}{\delta c^{\alpha_{p+1}}} = Z_{\alpha_{p+1}}{}^{\alpha_p}. \tag{2.74}$$

Definendo il settore minimale con $\phi^{\mathcal{A}}_{\min} = (\varphi^i(x), c^\alpha(x), c^{\alpha_2}(x), \cdots, c^{\alpha_n}(x))$, possiamo procedere, analogamente al caso non riducibile, risolvendo la master equation $\big(S\,,\,S\big) = 0$; poiché

$$S^{\alpha_p} = sc^{\alpha_p}, \tag{2.75}$$

le condizioni al contorno risentono ora della condizione (2.74), cosicché i coefficienti S^{α_p} dei termini lineari nei ghosts $c^*_{\alpha_p}$ dell'azione estesa S sono soggetti alle

$$\frac{\delta(S^{\alpha_p})}{\delta c^{\alpha_{p+1}}} = Z_{\alpha_{p+1}}{}^{\alpha_p}. \tag{2.76}$$

Il settore non minimale per una teoria riducibile è più complesso di quello delle teorie irriducibili: ad ogni ghost c^{α_p} di generazione p del settore minimale si associano infatti altri p ghosts, alternati tra antighosts ed *extraghosts*; gli extraghosts sono necessari perché gli antighosts non rimuovono tutta la degenerazione di gauge presente in una teoria riducibile. Accanto ad ogni ghost del settore non minimale si affianca poi un campo di Nakanishi-Lautrup (NL).

L'intero schema dei campi necessari alla procedura di Batalin-Vilkovisky per un sistema n-riducibile è riportato in Fig 2.1. Ogni riga rappresenta una generazione di ghosts-antighosts e di campi ausiliari. La prima traversa della piramide dei ghosts in Fig.2.1 è il settore minimale $\phi_{\rm nm} = (\varphi, c, c_2, \cdots, c_n)$, la seconda traversa contiene gli antighosts $(b, b_2, \cdots, b_n)$; nella terza compaiono gli extraghosts $(c'_2, c'_3, \cdots, c'_n)$, poi di nuovo gli antighosts degli extraghosts, e così via. I campi NL sono naturalmente privi della traversa minimale. Il numero di ghost è assegnato confrontando la Fig. 2.1 con la Fig. 2.2. Ai campi c^k_p e λ^k_p si associano poi i rispettivi anticampi c^{*p}_k e λ^{*p}_k: la dipendenza dell'azione estesa dai campi del settore non minimale è sempre quella banale

$$\begin{aligned} S_{\rm triv} &= \int dx \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c^{*p}_k \lambda^k_p \\ &= \int dx \left(\sum_{k=1}^{n} b^{*\alpha_k}\lambda_{\alpha_k} + \sum_{k=2}^{n} c'^*_{\alpha_k}\lambda'^{\alpha_k} + \sum_{k=3}^{n} b''^{*\alpha_k}\lambda''_{\alpha_k} + \cdots \right). \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & c_0^0 \equiv \varphi & & & \\
 & & c_1^1 \equiv b & & c_1^0 \equiv c & & \\
 & c_2^2 \equiv c_2' & & c_2^1 \equiv b_2 & & c_2^0 \equiv c_2 & \\
c_3^3 \equiv b_3'' & & c_3^2 \equiv c_3' & & c_3^1 \equiv b_3 & & c_3^0 \equiv c_3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Ghosts ed antighosts

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \lambda_1^1 \equiv \lambda & & \\
 & \lambda_2^2 \equiv \lambda_2' & & \lambda_2^1 \equiv \lambda_2 & \\
\lambda_3^3 \equiv \lambda_3'' & & \lambda_3^2 \equiv \lambda_3' & & \lambda_3^1 \equiv \lambda_3 \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Campi moltiplicatori di NL

Figura 2.1: struttura dei campi necessari per un sistema n-riducibile.

La prescrizione data da Batalin-Vilkovisky per il fermione di gauge nel caso riducibile è

$$\Psi = \int dx \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} c_{p+1}^{p+1-k} \mathcal{G} c_p^k, \tag{2.78}$$

dove $\mathcal{G}$ è un opportuno operatore di gauge-fixing.

2.2 Regolarizzazione e rinormalizzazione

Con l'azione estesa $S_{\rm gf}$ che otteniamo dalla trasformazione canonica di gauge fixing, in cui sono presenti ghosts, antighosts, campi ausiliari e relativi anticampi, si costruisce il funzionale delle funzioni di Green connesse tramite il path integral

$$e^{\frac{i}{\hbar}W[J,\phi^*]} = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar}\left(S_{\rm gf}[\phi,\phi^*]+J_{\mathcal{A}}\phi^{\mathcal{A}}\right)}, \tag{2.79}$$

dove si sono introdotte le correnti esterne $J^{\mathcal{A}} = (j^i(x), j_c^\alpha(x), j_{b\alpha}(x), j_{\lambda\alpha}(x))$. Quindi, con una trasformazione di Legendre relativa a queste correnti, costruiamo l'azione effettiva $\Gamma'[\phi,\phi^*]$ e da questa, nel caso in cui Ψ è quadratico nei campi, l'azione effettiva ridotta

$$\Gamma = \Gamma' - \frac{\Psi \overleftarrow{\delta}}{\delta b_\alpha}\lambda_\alpha, \tag{2.80}$$

dove $\Gamma[\phi,\phi^*] = \Gamma[\phi] + o(\phi^*)$. L'identità di Slavnov-Taylor è il corrispettivo quantistico della master equation, da cui si ottiene facendo una trasformazione BRST generalizzata

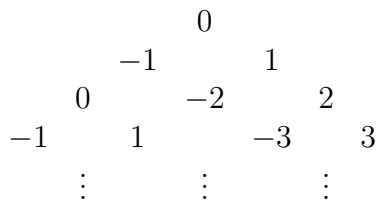


Figura 2.2: numero di ghost per un sistema n-riducibile.

sul funzionale $W[J,\phi]$ e di seguito una trasformazione di Legendre, ottenendo

$$\big(\Gamma\,,\,\Gamma\big) = 0. \tag{2.81}$$

L'identità di Slavnov-Taylor per $\Gamma[\phi]$ è, in conseguenza della (2.81),

$$s\Gamma = o(\hbar^2) \qquad \text{on-shell.} \tag{2.82}$$

La procedura è stata tuttavia descritta solo formalmente e deve essere maggiormente precisata. Il path integral (2.79) eseguito perturbativamente dà origine infatti ad integrali con divergenze ultraviolette. Per poter dare un significato a tali integrali si deve introdurre una *regolarizzazione* che modifichi l'azione in modo consistente allo scopo di evitare le divergenze. La procedura di regolarizzazione introduce uno o più parametri nella teoria, diciamo un parametro ϵ, e la teoria non regolarizzata si ottiene nel limite $\epsilon \to 0$. Noi utilizzeremo la Regolarizzazione Dimensionale (RD).

La *rinormalizzazione* è una ridefinizione, dipendente da ϵ, loop per loop, delle masse, delle costanti d'accoppiamento e dei campi; l'azione effettiva rinormalizzata Γ_R, espressa in termini delle quantità rinormalizzate è finita nel limite $\epsilon \to 0$. Nel limite in cui, dopo aver eseguito la rinormalizzazione, la regolarizzazione è rimossa, tutte le regolarizzazioni consistenti sono equivalenti, nel senso che danno origine alla stessa teoria quantistica.

Se la teoria ha delle anomalie, ovvero se si hanno rotture a livello quantistico delle invarianze dell'azione classica ineliminabili, queste invalidano l'identità (2.81) (e la (2.82)) producendo termini addizionali a secondo membro. Approfondiremo in Sez. 2.2.3 tali difficoltà.

2.2.1 Regolarizzazione Dimensionale

La Regolarizzazione Dimensionale [62, 53, 63] è una procedura consistente secondo la quale si estendono le dimensioni spazio-temporali da d a $D = d+\epsilon$, dove ϵ è un numero reale non intero. In questo modo gli integrali relativi ai grafici di Feynman danno risultati finiti che riproducono le divergenze ultraviolette per $\epsilon \to 0$. L'elemento di volume nello spazio degli impulsi, $\frac{d^d k}{(2\pi)^d}$, viene sostituito da $\mu^{-\epsilon}\frac{d^D k}{(2\pi)^D}$, dove μ è la scala che è necessario introdurre per consistenza in regolarizzazione dimensionale.

Per la definizione degli integrali in D dimensioni e le corrispondenti regole di calcolo rimandiamo a [53]. Qui ci limitiamo a ricordare le seguenti proprietà:

- Linearità
$$\int d^D k(af(k) + bg(k)) = a\int d^D k f(k) + b\int d^D k g(k) \tag{2.83}$$
- Invarianza per traslazioni
$$\int d^D k f(k + k_0) = \int d^D k f(k) \tag{2.84}$$
- Legge di scala
$$\int d^D k f(sk) = s^{-D}\int d^D k f(k) \tag{2.85}$$
- Convergenza (n intero, $n \geq 0$)
$$\int d^D k (k^2)^n = 0. \tag{2.86}$$

Conseguenza di quest'ultima proprietà è che in RD la misura del path integral è invariante per trasformazioni BRST. Infatti la variazione della misura è sempre proporzionale alla quantità che si indica simbolicamente con $\delta(0)$, dove $\delta(0) = \int d^D k$, che però è nulla in RD.

La metrica di Minkowsky in D dimensioni è espressa come una parte specifica in d dimensioni, ed una parte in eccesso di ϵ dimensioni:

$$\eta_{pq} = \bar{\eta}_{pq} + \hat{\eta}_{pq} \tag{2.87}$$

tale che $\bar{\eta}_p{}^p = d$, $\hat{\eta}_p{}^p = \epsilon$, $\eta_p{}^p = D$, e

$$\bar{\eta}_p{}^l \bar{\eta}_{lq} = \bar{\eta}_{pq} \tag{2.88a}$$

$$\hat{\eta}_p{}^l \hat{\eta}_{lq} = \epsilon \hat{\eta}_{pq} \tag{2.88b}$$

$$\bar{\eta}_p{}^l \hat{\eta}_{lq} = 0; \tag{2.88c}$$

grazie a tali proprietà si può scindere univocamente un vettore in una parte "barrata" ed in una parte "cappucciata",

$$v_p = \bar{\eta}_{pq} v^q + \hat{\eta}_{pq} v^q = \bar{v}_p + \hat{v}_p. \tag{2.89}$$

Un po' di attenzione è necessaria nella definizione del tensore completamente antisimmetrico $\varepsilon^{p_1 \cdots p_d}$ per non rischiare di incorrere in problemi legati all'associatività del prodotto tensoriale: risulta che la definizione corretta vincola $\varepsilon^{p_1 \cdots p_d}$ in d dimensioni (dunque tutti i suoi d indici sono implicitamente barrati).

Le matrici di Dirac D-dimensionali γ^p sono scomposte [62] in una parte d-dimensionale $\bar{\gamma}^p$ ed in una parte ϵ-dimensionale $\hat{\gamma}^p$,

$$\gamma^p = \bar{\gamma}^p + \hat{\gamma}^p, \tag{2.90}$$

dotate della proprietà di anticommutazione

$$\{\gamma^p, \gamma^q\} = 2\eta^{pq}; \tag{2.91}$$

la matrice γ^{d+1} è definita facendo uso del tensore $\varepsilon^{p_1 \cdots p_d}$,

$$\gamma^{d+1} = \frac{1}{d!} \varepsilon_{p_1 \cdots p_d} \gamma^{p_d} \cdots \gamma^{p_1} = \bar{\gamma}^1 \cdots \bar{\gamma}^d, \tag{2.92}$$

e dunque γ^{d+1} anticommuta con $\bar{\gamma}^p$ ma commuta con $\hat{\gamma}^p$:

$$\{\gamma^{d+1}, \bar{\gamma}^p\} = 0 \tag{2.93a}$$

$$\{\gamma^{d+1}, \hat{\gamma}^p\} = 2\gamma^{d+1} \hat{\gamma}^p \tag{2.93b}$$

$$[\gamma^{d+1}, \hat{\gamma}^p] = 0. \tag{2.93c}$$

La regolarizzazione dimensionale è algebricamente consistente una volta date queste prescrizioni. Tale regolarizzazione è una regolarizzazione analitica: se si è rinormalizzata la

teoria ad $n-1$ loop le divergenze ad n loop nel limite $\epsilon \to 0$ si manifestano come poli in ϵ al più di grado n, ed i residui di tali poli sono azioni locali, ovvero funzionali locali rinormalizzabili di ϕ e ϕ^*.

Indichiamo con S_0 l'azione estesa regolarizzata (per semplicità di notazione, omettiamo l'indicazione esplicita della dipendenza da ϵ), $S_0 = I_0 + \phi^*_{\mathcal{A}} s\phi^{\mathcal{A}} + \cdots$. I casi possibili sono due: 1) la regolarizzazione preserva tutte le invarianze dell'azione e 2) la regolarizzazione rompe una opiù invarianze dell'azione.

Nel primo caso la master equation (2.38) è ancora soddisfatta, e dunque la derivazione dell'identità di Slavnov-Taylor (2.81) è corretta. La proprietà di analiticità di RD permette allora la rinormalizzazione secondo lo schema di minima sottrazione [14]. Questo caso sarà considerato in Sez. 2.2.2.

Se invece la regolarizzazione rompe una o più simmetrie locali della teoria considerata, la master equation (2.38) non è più valida, e compare a secondo membro un termine evanescente (cioè nullo nel limite $\epsilon \to 0$),

$$\frac{1}{2}\big(S_0\,,\,S_0\big) = \mathcal{Q} = \epsilon\mathcal{R}, \tag{2.94}$$

dove $\mathcal{R} \in \mathcal{V}_1$; come conseguenza dell'identità di Jacobi vale $\big(\mathcal{R}\,,\,S_0\big) = 0$. Nel caso in cui $\mathcal{R}$ non dipenda dagli anticampi, la (2.94) diviene

$$sI = Q = \epsilon R, \tag{2.95}$$

dove R è BRST-invariante, $sR = 0$.

In analogia con la (2.89) si può scomporre l'azione estesa in D dimensioni S_0 in una parte d-dimensionale $\bar{S}_0$ che soddisfa alla master equation ed in una parte ϵ-dimensionale in eccesso $\hat{S}_0$, $S_0 = \bar{S}_0 + \epsilon\hat{S}_0$,[3] tali che

$$\begin{aligned} \big(\bar{S}_0\,,\,\bar{S}_0\big) &= 0 \\ \frac{\epsilon}{2}\big(\hat{S}_0\,,\,\hat{S}_0\big) + \big(\hat{S}_0\,,\,\bar{S}_0\big) &= \mathcal{Q}. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Di conseguenza l'identità di Slavnov non è più valida e lo schema di Sez. 2.2.2 andrà modificato, come vedremo in Sez. 2.2.3.

[3]Indichiamo esplicitamente la dipendenza da ϵ in questa decomposizione per semplificare la discussione successiva.

2.2.2 Rinormalizzazione ad un loop quando la regolarizzazione non rompe le simmetrie presenti a livello classico

Se la regolarizzazione non rompe le simmetrie locali dell'azione espresse nel formalismo BV dalla master equation (2.38), ad essa consegue correttamente l'identità di Slavnov-Taylor (2.81). L'azione effettiva ad un loop (dunque al primo ordine in $\hbar$) è

$$\Gamma_0 = S_0 + \hbar\Gamma^{(1)} + \cdots ; \tag{2.97}$$

l'identità di Slavnov-Taylor diviene allora

$$\mathbf{s}\Gamma^{(1)} = \left(\Gamma^{(1)}\,,\, S_0\right) = 0. \tag{2.98}$$

Scindiamo $\Gamma^{(1)}$ in una parte finita $\Gamma^{(1)}_{\text{fin}}$ nel limite $\epsilon \to 0$ ed in una parte divergente $\Gamma^{(1)}_{\text{div}}$,

$$\Gamma^{(1)} = \frac{1}{\epsilon}\Gamma^{(1)}_{\text{div}} + \Gamma^{(1)}_{\text{fin}}. \tag{2.99}$$

L'azione estesa rinormalizzata ad un loop è ottenuta sottraendo da S_0 la parte divergente $\Gamma^{(1)}_{\text{div}}$:

$$S_1 = S_0 - \frac{\hbar}{\epsilon}\Gamma^{(1)}_{\text{div}}. \tag{2.100}$$

La (2.98) implica per la parte divergente e la parte finita rispettivamente

$$\left(\Gamma^{(1)}_{\text{fin}}\,,\, S_0\right) = 0 \tag{2.101}$$

$$\left(\Gamma^{(1)}_{\text{div}}\,,\, S_0\right) = 0. \tag{2.102}$$

La (2.102) ha soluzione generale

$$\Gamma^{(1)}_{\text{div}} = S^{(1)} + \left(F^{(1)}\,,\, S_0\right), \tag{2.103}$$

dove $S^{(1)} \in \mathcal{V}_0$ è il cociclo non banale ed $\left(F^{(1)}\,,\, S\right)$ è il cociclo banale, $F^{(1)} \in \mathcal{V}_{-1}$. Il cociclo non banale $S^{(1)}$ è della forma (2.61),

$$S^{(1)} = \sum g^{(1)}_r I_r + o(\phi^*) \tag{2.104}$$

e dunque corrisponde ad una rinormalizzazione delle costanti d'accoppiamento (primo termine) e degli anticampi (termini successivi). Il cociclo banale rappresenta la trasformazione

canonica di generatore $-\hbar F^{(1)}$ di ridefinizione dei campi $\phi^{\mathcal{A}}$ e degli anticampi $\phi^*_{\mathcal{A}}$, ovvero la rinormalizzazione di funzione d'onda. L'azione estesa rinormalizzata ad un loop

$$S_1 = S_0 - \frac{\hbar}{\epsilon} S^{(1)} - \frac{\hbar}{\epsilon}\big(F^{(1)}\,,\, S_0\big) \tag{2.105}$$

soddisfa in conseguenza della (2.102) la master equation all'ordine $\hbar$:

$$\big(S_1\,,\, S_1\big) = o(\hbar^2). \tag{2.106}$$

Grazie alla (2.106) ed alla (2.101), l'azione rinormalizzata ad un loop $\Gamma_1 = S_1 + \hbar\Gamma_{\text{fin}}$ soddisfa all'identità di Slavnov-Taylor all'ordine $\hbar$:

$$\big(\Gamma_1\,,\, \Gamma_1\big) = o(\hbar^2). \tag{2.107}$$

La procedura continua poi allo stesso modo a due o più loop.

2.2.3 Rinormalizzazione ad un loop quando la regolarizzazione rompe le simmetrie presenti a livello classico

Se la regolarizzazione non rispetta le simmetrie dell'azione, lo schema di sottrazione minimale appena delineato non è più sufficiente. La procedura va opportunamente modificata. Tale modifica può non essere attuabile, nel caso in cui la rottura a livello quantistico delle simmetrie classiche è ineliminabile. Si parla in tal caso di *anomalie*, che in tal caso emergono in ogni regolarizzazione consistente. La presenza di anomalie relative a simmetrie locali segnala il fallimento della teoria a livello quantistico.

Definendo l'azione $\tilde{\mathcal{S}}_0 = S_0 - \rho^*\mathcal{R}$, dove ρ^* è un parametro globale anticommutante con numero di ghost -1, la master equation anomala (2.94) diviene

$$\big(\tilde{\mathcal{S}}_0\,,\, \tilde{\mathcal{S}}_0\big) + 2\epsilon\frac{\delta\tilde{\mathcal{S}}_0}{\delta\rho^*} = 0 \tag{2.108}$$

che applicata all'azione effettiva diviene l'identità anomala di Slavnov-Taylor

$$\big(\tilde{\Gamma}\,,\, \tilde{\Gamma}\big) + 2\epsilon\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\rho^*} = 0. \tag{2.109}$$

Adottiamo ora un conveniente artifizio formale, considerando ρ^* come anticampo globale relativo ad un campo globale (e dunque costante!) ρ, ed aggiungiamo entrambi all'insieme di campi $\phi^{\mathcal{A}}$ e $\phi^*_{\mathcal{A}}$, definendo l'azione migliorata

$$\mathcal{S}_{0\epsilon} = S_0 + \epsilon\rho - \rho^*\mathcal{R} \tag{2.110}$$

in cui ρ ha il ruolo di moltiplicatore relativo al limite $\epsilon \to 0$. La (2.108) diviene la master equation migliorata

$$\big(\mathcal{S}_{0\epsilon}\,,\,\mathcal{S}_{0\epsilon}\big) = 0. \tag{2.111}$$

Si definisce poi l'azione effettiva migliorata $\mathit{\Gamma}_{0\epsilon}$ dipendente da ϵ e da ρ: l'integrazione su ρ corrisponde ora ad una scrittura formale del limite $\epsilon \to 0$. La (2.109) diviene l'identità di Slavnov-Taylor migliorata

$$\big(\mathit{\Gamma}_{0\epsilon}\,,\,\mathit{\Gamma}_{0\epsilon}\big) = 0. \tag{2.112}$$

Grazie alla somiglianza *formale* dell'identità anomala migliorata (2.112) con l'identità (2.81), il programma di rinormalizzazione può essere ora intrapreso in analogia con il caso in cui la master equation e l'identità di Slavnov-Taylor sono valide. Per una trattazione più dettagliata di ciò che segue vedasi [13]. Scriviamo (ad un loop) l'azione effettiva $\mathit{\Gamma}_{0\epsilon}$ come (v. (2.97))

$$\mathit{\Gamma}_{0\epsilon} = \mathcal{S}_{0\epsilon} + \hbar\mathit{\Gamma}^{(1)} + \cdots\,; \tag{2.113}$$

l'identità (2.112) ad un loop diviene (v. (2.107))

$$\big(\mathit{\Gamma}^{(1)}\,,\,\mathcal{S}_{0\epsilon}\big) = 0 \tag{2.114}$$

e scrivendo $\mathit{\Gamma}^{(1)} = \frac{1}{\epsilon}\mathit{\Gamma}^{(1)}_{\text{div}} + \mathit{\Gamma}^{(1)}_{\text{fin}}$, come per la (2.99) si ha

$$\big(\mathit{\Gamma}^{(1)}_{\text{div}}\,,\,\mathcal{S}_{0\epsilon}\big) = o(\epsilon). \tag{2.115}$$

La (2.115) ha soluzione generale (v. (2.103))

$$\mathit{\Gamma}^{(1)}_{\text{div}} = \mathcal{S}^{(1)} + \big(\mathcal{F}^{(1)}\,,\,\mathcal{S}_{0\epsilon}\big), \tag{2.116}$$

dove $\mathcal{S}^{(1)} \in \mathcal{V}_0$ è il cociclo non banale ed $\big(\mathcal{F}^{(1)}\,,\,\mathcal{S}_{0\epsilon}\big)$ è il cociclo banale, $\mathcal{F}^{(1)} \in \mathcal{V}_{-1}$: tali quantità sono lineari in ρ^*, poiché ρ^* è anticommutante, e scriviamo dunque

$$\mathcal{S}^{(1)} = \bar{S}^{(1)} - \rho^*\Delta^{(1)}, \qquad \Delta^{(1)} = \mathcal{A} + \big(\bar{S}^{(1)}\,,\,\hat{S}_0\big) \tag{2.117a}$$

$$\mathcal{F}^{(1)} = F^{(1)} - \rho^*\hat{S}^{(1)}, \tag{2.117b}$$

dove $\bar{S}^{(1)}, \hat{S}^{(1)} \in \mathcal{V}_0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{V}_1$, $F^{(1)} \in \mathcal{V}_{-1}$. Il fatto che la (2.116) sia soluzione del problema coomologico (2.115) comporta come conseguenza che

$$\mathbf{s}\bar{S}^{(1)} \equiv \big(\bar{S}^{(1)}\,,\,\bar{S}_0\big) = 0 \tag{2.118}$$

$$\mathbf{s}\mathcal{A} \equiv \big(\mathcal{A}\,,\,\bar{S}_0\big) = 0. \tag{2.119}$$

Dunque $\bar{S}^{(1)}$ è la somma dei possibili cocicli non banali della coomologia BRST di $\mathbf{s} \equiv \big(\cdot\,,\,\bar{S}_0\big)$ in $\mathcal{V}_0$, e $\mathcal{A}$ è la somma dei possibili cocicli non banali della stessa coomologia in $\mathcal{V}_1$, (vedi eq.(2.104))

$$\bar{I}^{(1)} = \bar{S}^{(1)}\big|_{\phi^*=0} = \sum g_r^{(1)} I_r \tag{2.120}$$

$$A = \mathcal{A}\big|_{\phi^*=0} = \sum \omega_r^{(1)} \mathcal{A}_r. \tag{2.121}$$

La (2.119) è la condizione di consistenza di Wess-Zumino nel formalismo di Batalin-Vilkovisky. Si dimostra poi che

$$\big(\Gamma^{(1)}_{\text{fin}}\,,\,\mathcal{S}_{0\epsilon}\big) = \mathcal{A}. \tag{2.122}$$

L'azione estesa cui sono sottratte le divergenze ad un loop diviene quindi (v. (2.100)), grazie alla (2.116) e successive,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{1\epsilon} &= \mathcal{S}_{0\epsilon} - \frac{\hbar}{\epsilon}\Gamma^{(1)}_{\text{div}} \\ &= \left(S_0 - \frac{\hbar}{\epsilon}\bar{S}^{(1)}\right) - \frac{\hbar}{\epsilon}\big(F^{(1)}\,,\,\mathcal{S}_{0\epsilon}\big) + \epsilon\left(\rho - \frac{\hbar}{\epsilon}\hat{S}^{(1)}\right) - \\ &\quad - \rho^*\left(\mathcal{R} - \frac{\hbar}{\epsilon}\left(\big(\hat{S}^{(1)}\,,\,S_0\big) + \big(\bar{S}^{(1)}\,,\,\hat{S}_0\big)\right)\right) + \rho^*\frac{\hbar}{\epsilon}\mathcal{A};\end{aligned} \tag{2.123}$$

il primo termine al secondo membro tra parentesi di questa equazione rappresenta la rinormalizzazione delle costanti d'accoppiamento e degli anticampi ed il termine in $F^{(1)}$ rappresenta la rinormalizzazione di funzione d'onda, come già visto nella sottosezione precedente. Il termine successivo, lineare in ϵ, descrive la rinormalizzazione di ρ.

Definiamo ora la grandezza $S^{(1)} = \bar{S}^{(1)} + \epsilon\hat{S}^{(1)}$, che rappresenta la correzione al primo loop dell'azione estesa S_0; il primo dei due termini lineari in ρ^* nella (2.123) rappresenta una rinormalizzazione di $\mathcal{R}$ pari a $\frac{\hbar}{\epsilon^2}\big(S^{(1)}\,,\,S_0\big)$. L'ultimo termine della (2.123) rappresenta l'anomalia.

Riscriviamo l'azione $\mathcal{S}_{1\epsilon}$ come

$$\mathcal{S}_{1\epsilon} = S_1 + \epsilon\rho - \rho^*\mathcal{R}_1 - \frac{\hbar}{\epsilon}\big(F^{(1)}\,,\,\mathcal{S}_{0\epsilon}\big) + \frac{\hbar}{\epsilon}\rho^*\mathcal{A} + o(\hbar^2), \tag{2.124}$$

dove si sono definiti

$$S_1 = S_0 - \frac{\hbar}{\epsilon}S^{(1)} \tag{2.125}$$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{1}{2\epsilon}\big(S_1\,,\,S_1\big); \tag{2.126}$$

$\mathcal{S}_{1\epsilon}$ ha la stessa struttura di $\mathcal{S}_{0\epsilon}$, Eq.(2.110), a parte l'anomalia $\mathcal{A}$, e modulo una trasformazione canonica generata da $F^{(1)}$. L'azione effettiva rinormalizzata ad un loop è

$$\Gamma_1 = \mathcal{S}_{0\epsilon} + \hbar\Gamma^{(1)}_{\rm fin}; \tag{2.127}$$

grazie alla (2.111) ed alla (2.122) si ottiene l'identità di Slavnov-Taylor anomala rinormalizzata ad un loop

$$\frac{1}{2}\big(\Gamma_1\,,\,\Gamma_1\big) = \hbar\mathcal{A} + o(\hbar^2). \tag{2.128}$$

La procedura può poi continuare secondo lo stesso schema a loop successivi, partendo dall'azione $\mathcal{S}_{1\epsilon}$ di Eq.(2.124) in cui le divergenze ad un loop sono state riassorbite.

Metodo del vertice anomalo. La costruzione (2.123) ci fornisce uno schema operativo ad un loop per il calcolo in regolarizzazione dimensionale dell'azione estesa cui sono sottratte le divergenze, ed in particolare per il calcolo delle anomalie. Le correzioni quantistiche a $\mathcal{R}$, che indichiamo con $\frac{\hbar}{\epsilon}\mathcal{R}^{(1)}$, si ottengono dai poli in ϵ dei grafici di Feynman ad un loop con una inserzione del vertice $\mathcal{R}$. Dalle correzioni $\mathcal{R}^{(1)}$ si ricava l'anomalia $\mathcal{A}$: infatti dalla (2.123) si ha

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}^{(1)} - \big(\bar{S}^{(1)}\,,\,\hat{S}_0\big) - \big(\hat{S}^{(1)}\,,\,\bar{S}_0\big). \tag{2.129}$$

Normalmente solo il primo termine a secondo membro della (2.129), ovvero la correzione $\mathcal{R}^{(1)}$, contribuisce all'anomalia. Rispetto alla tradizionale procedura perturbativa di calcolo dell'anomalia, dove prima si calcola l'azione effettiva con i grafici di Feynman e poi se ne calcola la variazione di gauge, la procedura che si deriva dalla (2.129) prevede un rovesciamento delle operazioni descritte: prima si calcola la variazione di gauge dell'azione regolarizzata ottenendo quello che chiameremo il "vertice anomalo" $\mathcal{R}$, e successivamente si calcola la parte divergente dei grafici di Feynman che presentano l'inserzione di tale vertice.

L'indicazione che si ricava da questo metodo è che l'anomalia è locale e finita. La località è evidente perché in regolarizzazione dimensionale i contributi dei poli in ϵ sono locali. I contributi non locali che nel metodo tradizionale di calcolo delle anomalie compaiono come risultati intermedi sono dunque esclusi dall'inizio, e dunque il calcolo è sensibilmente semplificato.

L'anomalia $\mathcal{A}$ è diversa da zero solo nel caso in cui il secondo membro della (2.129) non sia equivalente ad un cociclo banale relativo all'operatore $\mathbf{s} \equiv \big(\cdot\,,\,\bar{S}_0\big)$. Nel caso in cui

l'anomalia sia effettivamente presente, la scelta di un rappresentante della coomologia di BRST $\mathbf{s}$ in $\mathcal{V}_1$ è determinata a mendalign della trasformazione combinata

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A} + \mathbf{s}\hat{X}^{(1)} \tag{2.130a}$$

$$\hat{S}^{(1)} \to \hat{S}^{(1)} - \hat{X}^{(1)}. \tag{2.130b}$$

Naturalmente, come già sottolineato, la presenza di un'anomalia $\mathcal{A}$ relativa a trasformazioni locali priva la teoria descritta dall'azione estesa S di ogni validità a livello quantistico evidenziandone l'inconsistenza.

2.3 Background field method e sviluppo in coordinate normali

Concludiamo questo capitolo di impostazione generale introducendo una tecnica che risulta conveniente per trattare i modelli sigma non lineari. Decriveremo anche il relativo adattamento Lorentz-covariante cui faremo riferimento nel prossimo capitolo nel caso di nostro interesse, il modello sigma di Green-Schwarz. Tale procedura sarà quindi formalizzata nell'ambito dello schema di Batalin-Vilkovisky.

Per svolgere dei calcoli a livello perturbativo nel modello sigma non lineare di Green-Schwarz è conveniente utilizzare il metodo dello sviluppo in campi di background. Le variabili di campo φ^i vengono descritte in termini di una parte classica φ_0^i di riferimento attorno alla quale si fa lo sviluppo, e di una parte di fluttuazione χ^i che rappresentano le variabili che verranno quantizzate [1, 3, 4],

$$\varphi^i = \varphi_0^i + \chi^i. \tag{2.131}$$

L'azione classica $I[\varphi]$ è sviluppata ordine per ordine in χ, ed al secondo ordine nei campi χ^i, on-shell, si ha

$$I[\varphi_0 + \chi] = I[\varphi_0] + \frac{1}{2}\chi^i\chi^j\frac{\delta^2 I}{\delta\varphi^j\delta\varphi^i} + \cdots . \tag{2.132}$$

I termini lineari in χ^i non sono presenti grazie alle equazioni del moto $\frac{\delta I}{\delta\varphi^i} = 0$. Allo scopo di mantenere l'invarianza a vista di Lorentz e di gauge noi utilizzeremo una variante di questa tecnica nota come "sviluppo in coordinate normali" [2, 19, 20]. In tal caso lo sviluppo è dato da

$$\varphi^i = \varphi_0^i + \Pi^i(\varphi_0, \chi) \equiv \Phi^i(\varphi, \chi) \tag{2.133a}$$

dove $\Phi^i(\varphi_0, \chi)$ e $\Pi^i(\varphi_0, \chi)$ sono opportune funzioni dei campi di background φ_0 e di quelli quantistici $\chi^{\hat{i}}$ tali da mantenere la covarianza di Lorentz e di gauge. L'azione classica $I[\varphi]$ è suscettibile di uno sviluppo in $\chi^{\hat{i}}$ analogo a quello indicato in (2.132) ma tale che i termini di ordine successivo a quello di ordine zero in $\chi^{\hat{i}}$ sono covarianti di gauge e di Lorentz. Lo sviluppo in campi di background si applica anche ai ghosts,

$$c^\alpha = c_0^\alpha + \Pi^\alpha(\phi_0, \chi) \equiv \mathcal{C}^\alpha(\phi_0, \chi) \tag{2.133b}$$

dove $\mathcal{C}^\alpha(\phi_0, \chi)$ e $\Pi^\alpha(\phi_0, \chi)$ sono le funzioni di covarianza dei ghosts, $\phi^{\mathcal{A}} = (\varphi^i, c^\alpha)$ e $\chi^{\hat{\mathcal{A}}} = (\chi^{\hat{i}}, \rho^{\hat{\alpha}})$; le (2.133a) e (2.133b) si scrivono

$$\phi^{\mathcal{A}} = \phi_0^{\mathcal{A}} + \Pi^{\mathcal{A}}(\phi_0, \chi) \equiv \Phi^{\mathcal{A}}(\phi_0, \chi). \tag{2.134}$$

2.3.1 Sviluppo in coordinate normali come trasformazione canonica

Nel linguaggio di Batalin-Vilkovisky lo sviluppo in coordinate normali diviene una trasformazione canonica. Sia data l'azione estesa di Eq. (2.43)

$$S_0[\phi, \phi^*] = I[\phi] + \phi^*_{\mathcal{A}} \Delta^{\mathcal{A}}[\phi, \phi^*] \tag{2.135}$$

dei campi $\phi^{\mathcal{A}}$ e degli anticampi $\phi^*_{\mathcal{A}}$. L'azione estesa S_0 soddisfa la master equation

$$\big(S_0\,,\, S_0\big) = 0. \tag{2.136}$$

Introduciamo ora il settore di background, aggiungendo un campo di background $\phi_0^{\mathcal{A}}$ per ogni campo $\phi^{\mathcal{A}}$ ed un anticampo di background $\phi^*_{0\mathcal{A}}$ per ogni anticampo $\phi^*_{\mathcal{A}}$. Poichè questa aggiunta è banale, si introduce anche un'invarianza relativa all'arbitraria ridefinizione dei campi di background, che chiameremo invarianza di shift:

$$\begin{aligned} \phi_0^{\mathcal{A}} &\to \phi_0^{\mathcal{A}} + \mathcal{E}^{\mathcal{A}} \\ \phi^{\mathcal{A}} &\to \phi^{\mathcal{A}}, \end{aligned} \tag{2.137}$$

dove $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$ sono i parametri arbitrari di shift. L'azione estesa dei campi $\phi^{\mathcal{A}}$, dei campi $\phi_0^{\mathcal{A}}$ di background e dei relativi anticampi $\phi^*_{\mathcal{A}}$ e $\phi^*_{0\mathcal{A}}$ è

$$S_0'[\phi, \phi_0; \phi^*, \phi_0^*] = I[\phi] + \phi^*_{\mathcal{A}} \Delta^{\mathcal{A}}[\phi, \phi^*] + \phi^*_{0\mathcal{A}} \mathcal{E}^{\mathcal{A}}; \tag{2.138}$$

essa soddisfa la master equation

$$\big(S_0'\,,\,S_0'\big)=0 \tag{2.139}$$

dove le antiparentesi agiscono su S_0' rispetto all'insieme completo dei campi di background ϕ_0 e dei campi inizialmente presenti ϕ ed ai relativi anticampi. La (2.139) è soddisfatta come conseguenza del fatto che l'aggiunta del settore di background è banale, in quanto l'azione (2.135) non contiene i campi $\phi_0^{\mathcal{A}}$. Le trasformazioni (2.133a) si traducono nella trasformazione canonica $\mathcal{G}:(\phi_0,\phi)\mapsto(\phi_0,\chi)$ generata da

$$G[\phi_0,\chi;\phi_0'^*,\phi'^*]=\phi_{\mathcal{A}}'^*\Phi^{\mathcal{A}}(\phi_0,\chi)+\phi^*_{0\mathcal{A}}\phi_0^{\mathcal{A}} \tag{2.140}$$

poiché infatti si ha

$$\phi_0'^{\mathcal{A}}=\frac{\delta G}{\delta\phi_0'^*}=\phi_0^{\mathcal{A}} \tag{2.141a}$$

$$\phi'^{\mathcal{A}}=\frac{\delta G}{\delta\phi_{\mathcal{A}}'^*}=\Phi^{\mathcal{A}}(\phi_0,\chi); \tag{2.141b}$$

la funzione generatrice G induce ora però anche le relative trasformazioni degli anticampi:

$$\chi^*_{\hat{\mathcal{A}}}=(-)^{\hat{\mathcal{A}}}\frac{\delta G}{\delta\chi^{\hat{\mathcal{A}}}}=\phi_{\mathcal{A}}'^*\frac{\Phi\overset{\leftarrow}{\delta}}{\delta\chi^{\hat{\mathcal{A}}}} \tag{2.141c}$$

$$\phi'^*_{0\mathcal{A}}=(-)^{\mathcal{A}}\frac{\delta G}{\delta\phi_0^{\mathcal{A}}}=\phi'^*_{0\mathcal{A}}+\phi'^*\frac{\Phi^{\mathcal{B}}\overset{\leftarrow}{\delta}}{\delta\phi_0^{\mathcal{A}}}. \tag{2.141d}$$

Tali trasformazioni possono essere invertite per ottenere:

$$\phi_{\mathcal{A}}'^*=\chi^*_{\hat{\mathcal{A}}}\left(\frac{\Phi^{\mathcal{A}}\overset{\leftarrow}{\delta}}{\delta\chi^{\hat{\mathcal{A}}}}\right)^{-1} \tag{2.142a}$$

$$\phi'^*_{0\mathcal{A}}=\phi^*_{0\mathcal{A}}-\phi_{\mathcal{B}}'^*\frac{\Phi\overset{\leftarrow}{\delta}}{\phi_0^{\mathcal{A}}}=\phi^*_{0\mathcal{A}}-\chi^*_{\hat{\mathcal{A}}}\left(\chi^{\hat{\mathcal{A}}}(\phi_0,\phi)\frac{\overset{\leftarrow}{\delta}}{\delta\phi_0^{\mathcal{A}}}\right). \tag{2.142b}$$

Con queste trasformazioni si ottiene l'azione estesa

$$\begin{aligned}S[\phi_0,\chi,&\mathcal{E};\phi_0^*,\chi^*]=S_0'[\phi',\phi_0';\phi'^*,\phi_0'^*]\\&=I[\Phi(\phi_0,\chi)]+\chi^*_{\hat{\mathcal{A}}}\left(\frac{\Phi^{\mathcal{A}}\overset{\leftarrow}{\delta}}{\delta\chi^{\hat{\mathcal{A}}}}\right)^{-1}\Delta^{\mathcal{A}}[\phi',\phi'^*]+\phi^*_{0\mathcal{A}}\mathcal{E}^{\mathcal{A}}-\chi^*_{\hat{\mathcal{A}}}\frac{\chi^{\hat{\mathcal{A}}}\overset{\leftarrow}{\delta}}{\delta\phi_0^{\mathcal{A}}}\mathcal{E}^{\mathcal{A}};\end{aligned} \tag{2.143}$$

trattandosi di una trasformazione canonica, la master equation è conservata, e dunque

$$\big(S\,,\,S\big)=0. \tag{2.144}$$

Il funzionale $W[\phi_0, J, \mathcal{E}; \phi_0^*, \chi^*]$ dei grafici connessi è dato dal path-integral

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}W[\phi_0, J, \mathcal{E}; \phi_0^*, \chi^*]\right) = \int \mathcal{D}\chi \exp\frac{i}{\hbar}\left(S[\phi_0, \chi, \mathcal{E}; \phi_0^*, \chi^*] + J_{\hat{\mathcal{A}}}\chi^{\hat{\mathcal{A}}}\right); \tag{2.145}$$

le correnti $J_{\hat{\mathcal{A}}}$ associate ai campi quantistici $\chi^{\hat{\mathcal{A}}}$ sono poi eliminate dalla trasformazione di Legendre che dà origine all'azione effettiva,

$$\Gamma'[\phi_0, \chi, \mathcal{E}; \phi_0^*, \chi^*] = W[\phi_0, J, \mathcal{E}; \phi_0^*, \chi^*] - J_{\hat{\mathcal{A}}}\chi^{\hat{\mathcal{A}}}, \tag{2.146}$$

dove

$$\chi^{\hat{\mathcal{A}}} = \frac{\delta W}{\delta J_\alpha} \tag{2.147}$$

e tale azione effettiva soddisfa, come conseguenza della (2.144), all'identità di Slavnov-Taylor

$$\left(\Gamma'\,,\,\Gamma'\right) = 0. \tag{2.148}$$

Sviluppiamo ora Γ' in termini di $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$,

$$\Gamma'[\phi_0, \chi, \mathcal{E}; \phi_0^*, \chi^*] = \Gamma_0'[\phi_0, \chi; \phi_0^*, \chi^*] + \phi_{0\mathcal{A}}^*\mathcal{E}^{\mathcal{A}} + \Lambda(\phi_0, \chi; \chi^*)\mathcal{E}^{\mathcal{A}} + \Lambda_{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\phi_0, \chi; \chi^*)\mathcal{E}^{\mathcal{B}}\mathcal{E}^{\mathcal{A}} + \cdots; \tag{2.149}$$

l'identità (2.148) può essere espressa ordine per ordine nei campi $\mathcal{E}$. All'ordine zero in $\mathcal{E}$ si ha che l'azione effettiva Γ_0' soddisfa all'identità di Slavnov-Taylor

$$\left(\Gamma_0'\,,\,\Gamma_0'\right) = 0; \tag{2.150}$$

all'ordine uno si ha l'identità di shift

$$\frac{\delta\Gamma_0'}{\phi_0^{\mathcal{A}}} - \frac{\delta\Gamma_0'}{\chi^{\hat{\mathcal{B}}}}\frac{\delta\Lambda_{\mathcal{A}}}{\chi^*_{\hat{\mathcal{B}}}} - \frac{\delta\Gamma_0'}{\chi^*_{\hat{\mathcal{B}}}}\frac{\delta\Lambda_{\mathcal{A}}}{\chi^{\hat{\mathcal{B}}}} = 0. \tag{2.151}$$

Si può ora dimostrare che in conseguenza dell'identità di shift (2.151) è possibile una trasformazione canonica tale da ottenere un'azione effettiva $\Gamma[\phi_0, \chi; \phi_0^*, \chi^*]$ priva del termine lineare in $\chi^{\hat{\mathcal{A}}}$,

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^{\hat{\mathcal{A}}}}\Big|_{\chi^{\hat{\mathcal{A}}}=0} = 0, \tag{2.152}$$

cosicché possiamo costruire l'azione effettiva di modello sigma dipendente dai soli campi di background

$$\Gamma_0[\phi_0, \phi_0^*] = \Gamma[\phi_0, \chi; \phi_0^*, \chi^*]\big|_{\chi=\chi^*=0} \tag{2.153}$$

che soddisfa alla identità di Slavnov-Taylor

$$\big(\Gamma_0\,,\,\Gamma_0\big) = 2\frac{\delta\Gamma_0}{\delta\phi_0^{\mathcal{A}}}\frac{\delta\Gamma_0}{\delta\phi^*_{0\mathcal{A}}} = 0. \tag{2.154}$$

Alcune considerazioni vanno fatte per quanto riguarda la correttezza della procedura appena delineata. Tale procedura è sicuramente corretta al primo ordine in $\hbar$, e dunque ad un loop. Il problema che sorge a due loop è che a priori vi possono essere delle correzioni in $\hbar$ alla trasformazione $\mathcal{G}$ indicata in (2.140) nella forma di correzioni $\hbar G^{(1)}$ alla funzione generatrice G. Tale possibilità induce dunque a due o più loop un'arbitrarietà nella procedura dello sviluppo che deve essere eliminata dando prescrizioni precise sulle correzioni ordine per ordine nelle loop sulla linea di quanto descritto in Sez. 2.2. La modifica necessaria richiede probabilmente il calcolo di diagrammi con campi esterni *quantistici*. La considerazione di tali diagrammi è innaturale nell'ambito del metodo dei campi di background, e potrebbe diminuire l'efficacia del metodo stesso ad ordini di loop superiori ad uno.

Capitolo 3

Quantizzazione del modello sigma eterotico di Green-Schwarz

Forniti degli strumenti formali descritti nel secondo capitolo, possiamo ora considerare in dettaglio il modello sigma associato alla superstringa di Green-Schwarz. Tale modello è generato da un'algebra di gauge aperta e quindi è necessaria la procedura di quantizzazione di Batalin-Vilkovisky.

In Sez. 3.1 saranno quindi date le variazioni BRST dei campi e dei ghosts del modello sigma, e sarà posta attenzione alla infinita riducibilità del modello, che rende necessaria la presenza di un numero infinito di ghosts secondari: l'azione estesa S che daremo alla fine di tale sezione contiene tutta l'informazione relativa all'azione e alle sue simmetrie.

Nota l'azione estesa, possiamo affrontare un'analisi precisa delle possibili anomalie presenti nel modello sigma basandoci sulle restrizioni che ad esse impone la condizione di consistenza di Wess-Zumino. Tale analisi coomologica sarà sviluppata in Sez. 3.2, ed in particolare vedremo la forma che ci aspettiamo debbano avere le anomalie κ ad un loop. Ciò che detta analisi non è in grado di produrre, tuttavia, sono i coefficienti di tali anomalie. Per ottenere i coefficienti è necessario il calcolo esplicito che verrà sviluppato nel quarto ed ultimo capitolo.

Una parte consistente di questo capitolo è occupata dalla Sez. 3.3, dove la non linearità del modello sigma è affrontata sviluppando il modello sigma in coordinate normali.

La tecnica formale presentata in Sez. 2.3 è infatti applicata al modello sigma associato alla superstringa eterotica, ottenendo in particolare le variazioni BRST dei campi quantistici e l'azione sviluppata al secondo ordine nei campi quantistici. Solo a questo

punto imponiamo il gauge-fixing di tipo semi cono luce [41], grazie al quale ci liberiamo dell'ingombrante settore degli infiniti ghosts κ quantistici.

Sono possibili numerose obiezioni ad un tale gauge-fixing (vedasi per esempio la discussione introduttiva di Ref. [39]), per quanto riguarda (a) possibili anomalie conformi da esso introdotte e (b) la rottura della covarianza per $SO(10)$ a favore di una più ridotta covarianza sotto $SO(8)$.

Per quanto riguarda il primo punto, in questo lavoro ci limitiamo a considerare il semi cono luce come un gauge-fixing operativo, che utilizziamo non essendo possibile, al momento, un gauge-fixing covariante consistente (vedasi a tale riguardo la discussione introduttiva di Ref. [12]).

In effetti, nel calcolo delle anomalie κ *ad un loop*, non compare alcuna inconsistenza legata al semi cono luce. E' probabile che i problemi di un tale gauge-fixing si evidenzino a partire da due loop (vedasi la discussione conclusiva del quarto capitolo).

Per quanto riguarda il secondo punto, è da notare che la presenza della covarianza "ridotta" sotto $SO(8)$ permette, nella maggior parte dei casi, la ricostruzione delle espressioni $SO(10)$-covarianti (con l'importante eccezione di espressioni contenenti il tensore completamente antisimmetrico a dieci indici). Naturalmente è necessario vincolare opportunamente i campi vettoriali e spinoriali del background ad $SO(8)$, ed a ciò va posta attenzione.

3.1 Azione estesa non sviluppata

Scopo di questa sezione è la costruzione dell'azione estesa sel modello sigma eterotico di Green-Schwarz, che contiene informazione sull'azione classica, le sue invarianze e le funzioni di chiusura di secondo ordine e successivo. Tale costruzione è in linea con la stessa costruzione di Ref. [12], salvo alcune differenze nell'azione classica e nelle variazioni BRST relative al dilatone, dovute al fatto che i vincoli di background non sono gli stessi.

L'infinita riducibilità del modello richiede un'infinità numerabile di ghosts κ; saranno fornite espressioni esplicite delle variazioni BRST e delle funzioni di chiusura relative ai ghosts κ di primo livello, mentre per i ghosts secondari rimandiamo a Ref. [12], in quanto tali espressioni non saranno necessarie per i calcoli ad un loop che svolgeremo nel quarto capitolo.

3.1.1 Variazioni BRST e loro nilpotenza on-shell

L'azione classica (1.68), che qui riportiamo,

$$I = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma \left(\sqrt{g}g^{ij}V_i{}^aV_{ja} + \varepsilon^{ij}V_i{}^CV_j{}^DB_{DC} - \sqrt{g}e_-{}^j\psi\mathcal{D}_j\psi\right), \tag{3.1}$$

è invariante rispetto alle trasformazioni di Weyl-Lorentz parametrizzate da $w_+{}^+$ e $w_-{}^-$ ed a quelle dei diffeomorfismi parametrizzate da ξ^i riportate nelle (1.72), ed alle trasformazioni κ parametrizzate dalla variabile fermionica $\kappa_{+\alpha}$ riportate in (1.74), (1.75). Introduciamo ora i ghosts relativi a tali invarianze, $u_\pm{}^\pm$ per le trasformazioni di Weyl-Lorentz, c^i per i diffeomorfismi in $d = 2$, ed il ghost k_α per le trasformazioni fermioniche κ. In realtà le variazioni κ danno origine ad un sistema infinitamente riducibile, cosicché saranno necessari infiniti ghosts κ, che indicheremo con k_n, dove $k \equiv k_1$. Il numero di ghost di $u_+{}^+$, $u_-{}^-$, c^i e k è 1, i ghosts k_n hanno numero di ghost n; la statistica intrinseca è invece fermionica solo per i ghosts k_n. Definiamo, in analogia con le (1.73), utilizzando gli stessi nomi, le grandezze

$$w^\alpha = V_-{}^a(\Gamma_a)^{\alpha\beta}k_\beta \equiv (\not{V}_-k)^\alpha \tag{3.2a}$$

$$C = w^\alpha A_\alpha, \qquad F_i = V_i{}^Aw^\beta F_{\beta A} \tag{3.2b}$$

$$L_f{}^g = w^\alpha\Omega_{\alpha f}{}^g, \qquad R_{if}{}^g = V_i{}^Aw^\beta R_{\beta Af}{}^g. \tag{3.2c}$$

Le variazioni BRST dei campi fisici Z^M, ψ e $e^i_\pm$ sono, grazie alle (1.72) e (1.74)

$$sZ^M = c^k\partial_kZ^M + w^\alpha E_\alpha{}^M \tag{3.3a}$$

$$s\psi = c^k\partial_k\psi + w^\alpha A_\alpha\psi \tag{3.3b}$$

$$se_-{}^i = c^k\partial_ke_-{}^i - \partial_-c^i + u_-{}^-e_-{}^i \tag{3.3c}$$

$$se_+{}^i = c^k\partial_ke_+{}^i - \partial_+c^i + u_+{}^+e_+{}^i - 4e_-{}^i\mathcal{V}_+{}^\varepsilon k_\varepsilon \tag{3.3d}$$

($\mathcal{V}_+{}^\varepsilon$ è stato definito in Eq. (1.73c)); di conseguenza la vielbein e le connessioni trasformano come segue sotto trasformazioni BRST:

$$sV_i{}^A = c^k\partial_kV_i{}^A + D_iw^\alpha\delta_\alpha{}^A + V_i{}^Bw^\gamma T_{\gamma B}{}^A - V_i{}^BL_B{}^A \tag{3.4a}$$

$$sA_i = c^k\partial_kA_i + \mathcal{D}_iC + F_i \tag{3.4b}$$

$$s\Omega_{if}{}^g = c^k\partial_k\Omega_{if}{}^g + D_iL_a{}^b + R_{if}{}^g. \tag{3.4c}$$

Le variazioni κ dei ghosts necessarie per chiudere on-shell l'algebra BRST sono le seguenti:

$$sc^i = -c^k\partial_k c^i + 2e_-{}^i(kw) \tag{3.5a}$$

$$su_-{}^- = -c^k\partial_k u_-{}^- + 2\partial_-(kw) \tag{3.5b}$$

$$su_+{}^+ = -c^k\partial_k u_+{}^+ - 2\omega_{-+}{}^+(kw) \tag{3.5c}$$

$$\begin{aligned} sk_\alpha &= s_L k_\alpha + (\not{V} k_2)_\alpha + F \\ &= (-c^k\partial_k + u_-{}^-)k_\alpha + s_L k_\alpha + (\not{V}_- k_2)_\alpha + s_\lambda k_\alpha + \hat{s}k_\alpha, \end{aligned} \tag{3.5d}$$

dove

$$s_L k_\alpha = -L_\alpha{}^\beta k_\beta \tag{3.6a}$$

$$= -(w^\varepsilon \Omega_{\varepsilon\alpha}{}^\beta)k_\beta \tag{3.6b}$$

$$s_\lambda k_\alpha = k_\alpha(w\lambda) - \lambda_\alpha(wk) \tag{3.6c}$$

$$= (\frac{1}{2} w^\varepsilon T_{\varepsilon\alpha}{}^\beta)k_\beta - V_-^2 \frac{1}{2}(\Gamma_g\lambda)^\alpha(k\Gamma^g k) \tag{3.6d}$$

$$\hat{s}k_\alpha = -(\Gamma_g V_-)_\alpha(k\Gamma_g k) + 4k_\alpha(kV_-). \tag{3.6e}$$

Spesso useremo la notazione qui introdotta del tipo $(wk) = w^\alpha k_\alpha$ per indicare prodotti di spinori di chiralità opposte con indici saturati. Per i ghosts k_n successivi, si ha

$$\begin{aligned} sk_n &= s_L k_\alpha + \not{V}_- k_{n+1} + F_n \\ &= (-c^k\partial_k + nu_-{}^-)k_n + s_L k_n + \not{V}_- k_{n+1} + s_\lambda k_n + \hat{s}k_n \end{aligned} \tag{3.7}$$

dove F_n, come $F \equiv F_1$ introdotta in (3.5d), è una abbreviazione che useremo in seguito per indicare contributi $SO(10)$-Lorentz covarianti alla variazione BRST di k_n che dipendono solo da $p \leq n$. s_L indica la rotazione di Lorentz che, essendo i ghosts k_n di chiralità alternante con n, è differente nel caso di n pari o dispari:

$$n \text{ dispari} \qquad s_L k_{n\alpha} = -L_\alpha{}^\beta k_{n\beta} \tag{3.8a}$$

$$n \text{ pari} \qquad s_L k_n^\alpha = k_n^\beta L_\beta{}^\alpha. \tag{3.8b}$$

Poiché in seguito elimineremo la serie infinita di ghosts k_n per $n > 1$ con un opportuno gauge-fixing, non ci saranno necessarie le espressioni esplicite di $\hat{s}k_n$ per $n > 1$ (tali espressioni si possono trovare in Ref. [12], per vincoli della supergravità di background connessi

ai nostri da una ridefinizione dei campi, e ponendo $c_1 = 0$ per riportarsi al caso non accoppiato), né l'espressione per $s_\lambda k_n$, che rappresenta contributi proporzionali al dilatino alla variazione BRST sk_n (si tratta sostanzialmente di contributi che corrispondono allo shift della connessione, $\Omega'_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \Omega_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$). Sono utili le seguenti relazioni:

$$w^\alpha w^\beta (\Gamma^g)_{\alpha\beta} = -V_-^2 (k\Gamma^g k) + 2V_-^g (kw) \tag{3.9a}$$

$$\frac{1}{2} w^\beta w^\gamma T_{\gamma\beta}{}^{\alpha} = w^\alpha (w\lambda) - (\not{V}_- \lambda)^\alpha (wk) + V_-^2 \frac{1}{2} (\Gamma_g \lambda)^\alpha (k\Gamma^g k) \tag{3.9b}$$

$$w^\beta T_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon} k_\varepsilon = k_\alpha (w\lambda) - \lambda_\alpha (wk) + \not{V}_{-\alpha\beta} \frac{1}{2} (\Gamma_g \lambda)^\beta (k\Gamma^g k) \tag{3.9c}$$

$$w^\beta w^\gamma T_{\gamma\beta}{}^{\alpha} k_\alpha = 0 \tag{3.9d}$$

e la definizione di $K^A = (K^a, K^\alpha)$,

$$K^a = (k\Gamma^a k) \tag{3.10a}$$

$$K^\alpha = k^\alpha - \frac{1}{2} (\Gamma_g \lambda)(k\Gamma^g k), \tag{3.10b}$$

grazie alle quali si ottengono le seguenti variazioni BRST:

$$sw^\alpha = -c^k \partial_k w^\alpha - w^\beta L_\beta{}^\alpha + \frac{1}{2} w^\beta w^\gamma T_{\gamma\beta}{}^{\alpha} - 2V_-{}^\alpha (wk) + V_-^2 K^\alpha \tag{3.11a}$$

$$s(wk) = (c^k \partial_k - u_-{}^-)(wk) + 2V_-^2 (kk_2) \tag{3.11b}$$

$$s\omega_{-+}{}^{+} = (c^k \partial_k + u_-{}^-)\omega_{-+}{}^{+} + \partial_- u_+{}^+ \tag{3.11c}$$

$$\begin{aligned} s(\mathcal{V}_+^\varepsilon k_\varepsilon) = {} & (-c^k \partial_k + (u_-{}^- - u_+{}^+))(\mathcal{V}_+^\varepsilon k_\varepsilon) - \frac{1}{2} D_+ (wk) + \\ & + (\not{V}_{-\alpha\beta} \mathcal{V}_+^\beta) K^\alpha - \frac{1}{2} \left(D_- V_{+a} + \frac{1}{2} \psi F_{-a} \psi \right) K^a; \end{aligned} \tag{3.11d}$$

confrontando con le equazioni del moto per Z^M in (1.95) si vede che i termini nella seconda riga a secondo membro nella (3.11d), che possono essere riscritti come $\frac{1}{2} K^A \left(\partial_A I - \frac{1}{2} \psi A_A \mathcal{D}_- \psi \right)$, si annullano on-shell. Grazie alle (3.9), (3.11) ed utilizzando le definizioni (3.10) verifichiamo la nilpotenza on-shell delle variazioni BRST dei campi:

$$s^2 Z^M E_M{}^A = V_-^2 K^A \tag{3.12a}$$

$$s^2 \psi = V_-^2 \left(K^A A_A \right) + 2(wk) \mathcal{D}_- \psi \tag{3.12b}$$

$$s^2 e_-{}^i = 0 \tag{3.12c}$$

$$s^2 e_+{}^i = -2 e_-{}^i K^A \left(\partial_A I - \frac{1}{2} \psi A_A \mathcal{D}_- \psi \right), \tag{3.12d}$$

e la nilpotenza on-shell delle variazioni BRST dei ghosts:

$$s^2 c^i = 4 e_-{}^i V_-^2(kk_2) \tag{3.13a}$$

$$s^2 u_-{}^- = 4\partial_- \left(V_-^2(kk_2)\right) \tag{3.13b}$$

$$s^2 u_+{}^+ = 4\omega_{-+}{}^+ V_-^2(kk_2) \tag{3.13c}$$

$$s^2 k_\alpha = V_-^2(k_{3\alpha} - 2\lambda_\alpha(kk_2)), \tag{3.13d}$$

e dei ghosts di ghosts,

$$\begin{aligned} s^2 k_n &= V_-^2(k_{n+2} + s'_L k_n + F'_n) \\ &= V_-^2\left(k_{n+2} + s'_L k_n + s'_\lambda k_n + \hat{s}' k_n\right), \end{aligned} \tag{3.14}$$

dove $s'_L k_n$ contiene la connessione di Lorentz,

$$n \text{ dispari} \quad s'_L k_{n\alpha} = -(k_2^\varepsilon \Omega_{\varepsilon\alpha}{}^\beta) k_{n\beta} \tag{3.15a}$$

$$n \text{ pari} \quad s'_L k_n^\alpha = k_n^\beta (k_2^\varepsilon \Omega_{\varepsilon\beta}{}^\alpha), \tag{3.15b}$$

ed F'_n rappresenta contributi $SO(10)$-Lorentz covarianti che non esplicitiamo per $n > 1$ divisi nel contributo intrinseco $\hat{s}' k_n$ (v. [12]) e nel contributo del dilatino $s'_\lambda k_n$.

3.1.2 Ricostruzione dell'azione estesa

Il settore minimale della superstringa di Green-Schwarz contiene dunque i campi fisici $\varphi^i \equiv (Z^M, \psi, e_-{}^i, e_+{}^i)$, i ghosts $c^\alpha \equiv (c^i, u_-{}^-, u_+{}^+, k_\alpha)$ ed i ghosts di ghosts $\{c^{\alpha_p}\} \equiv (k_2^\alpha, k_{3\alpha}, k_4^\alpha, \cdots)$, $p \geq 2$. La presenza dell'infinita serie dei ghosts è dovuta all'infinita riducibilità del modello.

Dalle variazioni BRST dei campi (3.3), grazie alle (2.42b) otteniamo i coefficienti $S^i = s\varphi^i$ dei termini al primo ordine negli anticampi $\varphi^*_i \equiv (Z^*_M, \psi^*, e^{*\pm}{}_i)$, e dalle variazioni BRST dei ghosts (3.5) e dei ghosts successivi (3.7), grazie alle (2.49) ed alle (2.75) otteniamo i coefficienti dei termini al primo ordine negli anticampi dei ghosts $c^*_\alpha = (c^*_i, u^{*+}_+, u^{*-}_-, k^*_\alpha)$ e dei ghosts di livello superiore $\{c^*_{\alpha_p}\} \equiv (k^*_{2\alpha}, k_3^{*\alpha}, k^*_{4\alpha}, \cdots)$.

Poiché il sistema possiede un'algebra aperta, l'azione estesa è caratterizzata da termini non nulli al secondo ordine negli anticampi. Confrontando le espressioni per le variazioni quadre BRST dei campi (3.12) con le (2.52a) otteniamo i coefficienti S^{ij},

$$S_2^{\text{campi}} = \frac{1}{\sqrt{g}} e_-{}^i e_i^{*+} \left(Z^*_M E^M_A + \frac{1}{2}\psi^* A_A \psi\right) K^A \tag{3.16}$$

e confrontando le espressioni che danno la nilpotenza on-shell delle variazioni BRST dei ghosts (3.13) e dei ghosts successivi (3.14) otteniamo i coefficienti $S^{\alpha j}$ relativi ai ghosts c^i, ${u_+}^+$ ed ${u_-}^-$,

$$S_2^{\text{ghosts}} = \frac{1}{\sqrt{g}} {e_-}^i e_i^{*+} \left(c_k^* {e_-}^k + \omega_{-+}{}^+ u_+^{*+} - \partial_- u_-^{*-} \right) 4(\kappa\kappa_2) \tag{3.17}$$

ed i coefficienti $\{S^{\alpha_p j}\}$ relativi ai ghosts k_p,

$$S_2^{\text{k-ghosts}} = \frac{1}{\sqrt{g}} {e_-}^i e_i^{*+} k_n^* \left(k_{n+2} + s'_L k_n + F'_n \right). \tag{3.18}$$

Come è stato dimostrato facendo riferimento a motivi dimensionali in [12], i termini di secondo ordine negli anticampi relativi ai ghosts $S^{\alpha\beta}$ sono tutti nulli, come pure i termini di ordine maggiore di 2, eccetto che per il coefficiente di $e_i^{*+}\psi^*\psi^*$,

$$S_3 = \frac{1}{g} {e_-}^i e_i^{*+} \psi^* \psi^* 4(k k_2). \tag{3.19}$$

3.2 Analisi coomologica delle possibili anomalie

Ora che abbiamo l'azione estesa del modello sigma eterotico di Green-Schwarz possiamo discutere in dettaglio le restrizioni che la condizione di consistenza di Wess-Zumino,

$$\mathbf{s}\mathcal{A} \equiv \big(\mathcal{A}\,,\, S\big) = 0 \tag{3.20}$$

impone sulla struttura delle anomalie di tale modello. Da questa analisi trarremo indicazioni su ciò che ci aspettiamo da un calcolo esplicito.

La condizione (3.20) definisce una coomologia nello spazio dei funzionali locali con numero di ghost 1 dipendenti da $\phi^{\mathcal{A}}$ e $\phi^*_{\mathcal{A}}$, più precisamente dipendenti da φ^i, c^α, b_α, λ_α e da φ_i^*, c_α^*, $b^{*\alpha}$ ma non da $\lambda^{*\alpha}$. L'identità di Slavnov anomala

$$\frac{1}{2}\big(\Gamma\,,\,\Gamma\big) = \hbar\mathcal{A} + o(\hbar^2) \tag{3.21}$$

richiede che l'anomalia $\mathcal{A}$ abbia dimensione canonica $d_c = 2$. Ricordiamo che l'anomalia è sempre definita a mendalign di cocicli banali della forma

$$\mathcal{A}_0 = \mathbf{s}\mathcal{F} = \big(\mathcal{F}\,,\, S\big), \tag{3.22}$$

dove $\mathcal{F} \in \mathcal{V}_{-1}$, che possono dunque essere sottratti a piacere dall'anomalia $\mathcal{A}$.

Traduciamo ora la condizione di Wess-Zumino (3.20) nel linguaggio della coomologia debole BRST. Sviluppando $\mathcal{A}$ ed S in serie negli anticampi, scrivendo

$$\mathcal{A}[\phi,\phi^*] = A[\phi] + \phi^*_{\mathcal{A}}\mathcal{A}^{\mathcal{A}}[\phi] + \frac{1}{2}\phi^*_{\mathcal{A}}\phi^*_{\mathcal{A}}\mathcal{A}^{\mathcal{B}\mathcal{A}}[\phi] + \cdots \tag{3.23a}$$

$$S[\phi,\phi^*] = I[\varphi] + \phi^*_{\mathcal{A}}s\phi^{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\phi^*_{\mathcal{A}}\phi^*_{\mathcal{B}}S^{\mathcal{B}\mathcal{A}} + \cdots, \tag{3.23b}$$

si ottengono le corrispondenti condizioni ordine per ordine negli anticampi. La prima, $\big(A\,,\,I\big) = 0$, è banalmente soddisfatta, la seconda è la condizione di consistenza di Wess-Zumino on-shell nella coomologia debole di BRST $s \equiv \big(\cdot\,,\,S\big)\big|_{\phi^*=0}$,

$$sA = -\mathcal{A}^i\partial_i I, \tag{3.24}$$

la terza si traduce nell'equazione

$$s\mathcal{A}^{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{\mathcal{B}}\partial_{\mathcal{B}}(s\phi^{\mathcal{A}}) - S^{\mathcal{A}\mathcal{B}}\partial_{\mathcal{B}}A - \mathcal{A}^{\mathcal{A}j}\partial_j I \tag{3.25}$$

per la variazione BRST s delle quantità lineari negli anticampi $\mathcal{A}^{\mathcal{A}}$. L'equazioni (3.24) ci permette di calcolare i termini $\mathcal{A}^i$ lineari negli anticampi φ^*_i dell'anomalia $\mathcal{A}$, una volta nota l'anomalia A, calcolandone le variazioni BRST. Con la (3.25), note le $\mathcal{A}^i$ si calcolano i coefficienti $\mathcal{A}^{ij}$, ed inoltre si ricavano i coefficienti $\mathcal{A}^\alpha$ che sono compatibili con tale equazione. Il procedimento è analogo al caso dell'azione estesa, ed ha come conseguenza il fatto che, nota l'anomalia "debole" A compatibile con la condizione (3.24), è di conseguenza nota l'anomalia $\mathcal{A}$ dipendente dagli anticampi grazie alla condizione (3.20).

Non è restrittivo assumere che l'anomalia non dipenda dai campi del settore non minimale λ_α, b_α e $b^{*\alpha}$ (per una dimostrazione di tale affermazione, vedasi Ref. [12]).

L'anomalia $\mathcal{A}$ può sempre essere scelta indipendente dai ghosts c^i. Infatti eventuali anomalie dei diffeomorfismi possono sempre essere trasformate in anomalie di Lorentz e di Weyl sottraendo opportuni cocicli dall'azione effettiva.

Contributi all'anomalia non invarianti per Weyl-Lorentz del tipo

$$\mathcal{A}^{(+)} = \int d^2\sigma\sqrt{g}u_+{}^+\mathcal{B}^{(+)}, \tag{3.26}$$

ovvero tali che $s(\sqrt{g}\mathcal{B}^{(+)}) = q^{(+)}u_+{}^+\sqrt{g}\mathcal{B}^{(+)}$, sono eliminati sottraendo il cociclo banale $\mathcal{F}^{(+)} = \frac{1}{q^{(+)}}\int d^2\sigma\sqrt{g}\mathcal{A}^{(+)}$. Analogo è il caso per una dipendenza esplicita da $u_-{}^-$ invece che da $u_+{}^+$.

Passiamo ad una discussione più dettagliata, facendo uso della decomposizione (3.23a) dell'anomalia in potenze degli anticampi. La condizione di Wess-Zumino on-shell (3.24) sulla parte dell'anomalia indipendente dagli anticampi $A[\phi]$ è data da

$$sA = 0 \qquad \text{on-shell.} \tag{3.27}$$

L'anomalia A è un funzionale locale di $\mathcal{U}_1$ ($\mathcal{U}_1$ è lo spazio della coomologia debole BRST con numero di ghost 1 definito in Sez. 2.1.4). L'analisi coomologica in $\mathcal{U}$ è semplificata, in quanto non sono presenti gli anticampi. In particolare, la dipendenza dai ghosts è al più lineare. Per la discussione precedente, A non dipende da c^i. Inoltre non dipende dai ghosts k_p per $p > 1$ che hanno numero di ghost $p > 1$. A può dunque dipendere solo da ${u_+}^+$, ${u_-}^-$ e k_α e comunque al più linearmente.

Dipendenza da k_α. A causa del termine $(\not{V}_- k_2)_\alpha$ nella variazione di k_α, osservando le equazioni del moto (1.95b) ed (1.95d), notiamo che la dipendenza da k_α che soddisfa la (3.27) è nelle due possibili forme w^α e $(\mathcal{V}_+ k) \equiv {\mathcal{V}_+}^\alpha k_\alpha$. In realtà il secondo tipo di dipendenza, che comporta l'anomalia

$$A_\mathcal{V} = \int d^2\sigma \sqrt{g} (\mathcal{V}_+ k) {e_-}^i X_{-i}, \tag{3.28}$$

è eliminato sottraendo il cociclo $sF_\mathcal{V}$, dove

$$F_\mathcal{V} = \frac{1}{4} \int d^2\sigma \sqrt{g} {e_+}^i X_{-i}. \tag{3.29}$$

Dipendenza da ${u_+}^+$, ${u_-}^-$. Le possibili anomalie che dipendono da ${u_+}^+$ ed ${u_-}^-$ sono della forma

$$A^{(+)} = \int d^2\sigma \sqrt{g} {u_+}^+ B^{(+)} \tag{3.30a}$$

$$A^{(-)} = \int d^2\sigma \sqrt{g} {u_-}^- B^{(-)}. \tag{3.30b}$$

Le anomalie (3.30) contengono in linea di principio genuine anomalie di Weyl-Lorentz,

$$A^{(+)}_{\text{wl}} = \int d^2\sigma {u_+}^+ \varepsilon^{ij} \partial_i {\omega_{j+}}^+ \tag{3.31a}$$

$$A^{(-)}_{\text{wl}} = \int d^2\sigma {u_-}^- \varepsilon^{ij} \partial_i {\omega_{j-}}^-; \tag{3.31b}$$

il coefficiente di tali anomalie è comunque nullo nella dimensione critica $D = 10$ [15, 16]. Le anomalie (3.30) contengono in generale anomalie che dipendono dai supercampi di background; in tal caso $B^{(+)}$ e $B^{(-)}$ sono proporzionali a $V_-{}^A$. Di queste, il termine (3.30b) è incompatibile con la condizione di Wess-Zumino (3.27), in quanto la sua variazione BRST dà origine al contributo

$$\int d^2\sigma\sqrt{g}(wk)D_-B^{(-)} \tag{3.32}$$

che, contenendo $D_-V_-{}^A$, non può essere compensato da alcun termine proporzionale alle equazioni del moto.

Per quanto riguarda l'anomalia (3.30a), la presenza di $-2\omega_{-+}{}^+(wk)$ nella variazione BRST (3.5c) di $u_+{}^+$ ne impone l'associazione con l'anomalia κ che ne è partner,

$$A_\kappa^{(+)} = -\int d^2\sigma\sqrt{g}w^\alpha\omega_{-+}{}^+B_{+\alpha}. \tag{3.33}$$

In definitiva, le possibili anomalie sono

$$A_\kappa = \int d^2\sigma\sqrt{g}w^\alpha B_\alpha \tag{3.34a}$$

$$A_u = \int d^2\sigma\sqrt{g}U_-{}^AB_{+A} \tag{3.34b}$$

dove abbiamo introdotto $U_-{}^A = (U_-{}^a, U_-{}^\alpha)$.

$$U_-{}^a = u_+{}^+V_-{}^a \tag{3.35a}$$

$$U_-{}^\alpha = u_+{}^+V_-{}^\alpha - \omega_{-+}{}^+w^\alpha. \tag{3.35b}$$

In conseguenza di questa discussione, notiamo che la condizione di consistenza di Wess-Zumino (3.27) è a questo punto sensibile solo alle variazioni BRST indotte dai ghosts $u_+{}^+$ e k_α. In particolare, della variazione BRST (3.11a) di w^α è efficace solamente la parte (on-shell)

$$\tilde{s}w^\alpha = -w^\beta L_\beta{}^\alpha - 2V_-{}^\alpha(wk) + \frac{1}{2}w^\beta w^\gamma T_{\gamma\beta}{}^\alpha. \tag{3.36}$$

3.2.1 Anomalia A_κ

Abbiamo visto che l'anomalia A_κ può dipendere da k_α al più linearmente e solo nella combinazione w^α. Per motivi dimensionali l'anomalia A_κ, dipendente da w^α, ha la struttura generale

$$A_\kappa = A_\kappa^T + A_\kappa^H + A_\kappa^F, \tag{3.37}$$

dove

$$A^T_\kappa = -\frac{\hbar}{2}\int d^2\sigma 2\sqrt{g}V_{ia}V_j{}^B w^\gamma \bar{T}_{\gamma B}{}^a \tag{3.38a}$$

$$A^H_\kappa = -\frac{\hbar}{2}\int d^2\sigma \varepsilon^{ij}V_i{}^A V_j{}^B w^\gamma \bar{H}_{\gamma BA} \tag{3.38b}$$

$$A^F_\kappa = -\frac{\hbar}{2}\int d^2\sigma \sqrt{g}\psi V_-{}^B w^\gamma \bar{F}_{\gamma B}\psi, \tag{3.38c}$$

di cui i supercampi $\bar{T}_{\gamma B}{}^a$, $\bar{H}_{\gamma BA}$, $\bar{F}_{\gamma B}$ sono componenti delle superforme

$$\bar{T}^A = \frac{1}{2}E^B E^C \bar{T}_{CB}{}^A \tag{3.39a}$$

$$\bar{H} = \frac{1}{3!}E^A E^B E^C \bar{H}_{CBA} \tag{3.39b}$$

$$\bar{F} = \frac{1}{2}E^A E^B \bar{F}_{BA}. \tag{3.39c}$$

I supercampi in (3.38) soddisfano alle restrizioni sottintese nelle (3.39) in quanto la condizione di Wess-Zumino (3.27) impedisce la presenza di $(\mathcal{V}_+ k)$ e di $w^{[\alpha}\partial_\pm w^{\beta]}$ nella variazione BRST sA_κ. Notiamo che l'anomalia A_κ ha la stessa struttura della variazione κ dell'azione classica, Eq. (1.76), dove al parametro classico $\kappa_{+\alpha}$ è sostituito il ghost k_α.

L'equazione (3.27) impone delle condizioni sulle superforme (3.39): la variazione BRST di $A^{(k)}$ dà

$$sA_\kappa = sA^T_\kappa + sA^H_\kappa + sA^F_\kappa = 0, \tag{3.40}$$

dove

$$sA^T_\kappa = -\frac{\hbar}{2}\int d^2\sigma 2\sqrt{g}g^{ij}V_{ia}V_j{}^\beta w^\gamma w^\delta \left[(D\bar{T}^a)_{\delta\gamma B} + (\bar{T}^G(i_G T^a))_{\delta\gamma B}\right] \tag{3.41a}$$

$$sA^H_\kappa = -\frac{\hbar}{2}\int d^2\sigma \varepsilon^{ij}V_i{}^A V_j{}^B w^\gamma w^\delta \left[(D\bar{H})_{\delta\gamma BA} + (\bar{T}^G(i_G H))_{\delta\gamma BA}\right] \tag{3.41b}$$

$$sA^F_\kappa = -\frac{\hbar}{2}\int d^2\sigma 2\sqrt{g}\psi V_-{}^B w^\gamma w^\delta \left[(\mathcal{D}\bar{F}^a)_{\delta\gamma B} + (\bar{T}^G(i_G F))_{\delta\gamma B}\right] \tag{3.41c}$$

(i_G indica in queste espressioni il prodotto interno relativo alla supervielbein E^G). L'annullamento (on-shell) di (3.40) costituisce una condizione equivalente alla validità delle

identità di Bianchi al primo ordine in $\hbar$ delle curvature [11]

$$T'^A = T^A + \hbar \bar{T}^A \tag{3.42a}$$

$$H' = H + \hbar \bar{H} \tag{3.42b}$$

$$F' = F + \hbar \bar{F} \tag{3.42c}$$

$$R'_a{}^b = R_a{}^b + \hbar \bar{R}_a{}^b, \tag{3.42d}$$

dove $\bar{T}^\alpha$, la due-superforma a valori nell'algebra di Lorentz $\bar{R}_a{}^b$ e le componenti più alte di $\bar{T}^a$, $\bar{H}$ ed $\bar{F}$ sono ottenute da queste identità di Bianchi al primo ordine in $\hbar$. Le curvature T^A, H, F ed $R_a{}^B$ sono quelle già presenti a livello classico. I cocicli banali di (3.40) corrispondono a ridefinizioni di vielbein e connessioni dello spazio ambiente.

L'unica rappresentazione irriducibile di $\bar{T}^a$ che non può essere eliminata all'ordine $\hbar$ da ridefinizioni delle supervielbein e delle connessioni è la 1050 [37]. Si pone quindi il problema di una possibile presenza della sola 1050 in $\bar{T}^a$, ovvero nella torsione T'^a all'ordine $\hbar$, che soddisfa le identità di Bianchi. Non è nota in letteratura una supergravità che contenga tale rappresentazione; $\bar{T}^a$ è d'altronde un campo composto, ovvero una funzione locale di altri campi già presenti a livello classico, e la condizione che impongono le identità di Bianchi sulla 1050, $D_{(\alpha} \overset{1050}{\bar{T}}{}_{\beta\gamma)}$, è fortemente vincolante. E' lecito pertanto supporre che almendalign al primo loop, ovvero all'ordine $\hbar$, tale 1050 non sia presente, cosicché $\bar{T}^a = 0$. In tal caso le (3.41b) e (3.41c) si semplificano nelle

$$sA^H_\kappa = -\frac{\hbar}{2} \int d^2\sigma \varepsilon^{ij} V_i{}^A V_j{}^B w^\gamma w^\delta (d\bar{H})_{\delta\gamma BA} \tag{3.43a}$$

$$sA^F_\kappa = -\frac{\hbar}{2} \int d^2\sigma \sqrt{g} \psi V_j{}^B w^\gamma w^\delta (\mathcal{D}\bar{F})_{\delta\gamma BA} \psi, \tag{3.43b}$$

e dunque la condizione di consistenza di Wess-Zumino impone i seguenti vincoli sulle componenti più basse di $d\bar{H}$ e $\mathcal{D}\bar{F}$

$$(d\bar{H})_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 = (d\bar{H})_{a\beta\gamma\delta} \tag{3.44a}$$

$$(\mathcal{D}\bar{F})_{\alpha\beta\gamma} = 0; \tag{3.44b}$$

le componenti $(d\bar{H})_{ab\alpha\beta}$ e $(\mathcal{D}\bar{F})_{a\alpha\beta}$ in tal caso danno contributi che si annullano on-shell. Per una prova esplicita della validità del procedimento anche per l'anomalia completa $\mathcal{A}_\kappa$ dipendente dagli anticampi, vedasi Ref. [12].

Sotto le condizioni (3.44a) è sempre possibile scegliere $\bar{H}$ tale che

$$(d\bar{H})_{ab\alpha\beta} = (\Gamma_a \Gamma_{cde} \Gamma_b)_{\alpha\beta} S^{cde} \tag{3.45}$$

per un qualche supercampo S^{cde} nella rappresentazione 120. La condizione (3.43a) è soddisfatta on-shell, facendo uso dell'identità (1.78). In $\bar{H}$ possono [44] essere necessariamente presenti le tre-superforme di Chern-Simons ω_{3YM} ed ω_{3L}, che danno origine alla teoria SUGRA-SYM accoppiata.

Poiché $d\omega_{3YM} = \operatorname{tr} F^2$ soddisfa le (3.44a) grazie al vincolo $F_{\alpha\beta} = 0$, le stesse relazioni non sono soddisfatte da $d\omega_{3L} = \operatorname{tr} R^2$, in quanto nella teoria accoppiata il vincolo $R_{\alpha\beta} = 0$ non è più possibile, è necessario far uso del teorema di Bonora-Pasti-Tonin [36] secondo cui $\operatorname{tr} R^2 = dX + K$, dove X e K sono superforme gauge- e Lorentz-invarianti, e K soddisfa alle (3.44a). La definizione

$$\bar{H} = c_1 \omega_{3YM} - c_2(\omega_{3L} - X) \tag{3.46}$$

assicura quindi la validità delle (3.44a).

Va notato che l'analisi coomologica appena conclusa delle anomalie κ non fornisce tuttavia il valore esplicito dei coefficienti c_1 e c_2, per ottenere i quali sarà necessario il calcolo esplicito delle anomalie che faremo nel quarto capitolo.

3.2.2 Anomalia A_u

La struttura generale dell'anomalia di Weyl-Lorentz, per ragioni dimensionali è

$$A_u = A_u^T + A_u^F, \tag{3.47}$$

dove

$$A_u^T = \frac{\hbar}{2} \int d^2\sigma \sqrt{g} U_-{}^B V_{+a} \tilde{T}_B{}^a \tag{3.48a}$$

$$A_u^F = -\frac{\hbar}{2} \int d^2\sigma \sqrt{g} U_-{}^B \psi \tilde{F}_B \psi, \tag{3.48b}$$

introducendo le 1-superforme

$$\begin{aligned} \tilde{T}^a &= E^B \tilde{T}_B{}^a \\ \tilde{F} &= E^B \tilde{F}_B \end{aligned} \tag{3.49}$$

di cui la seconda è a valori nell'algebra di gauge. La variazione BRST di A_u^T ed A_u^F è [12]

$$sA_T^{(u)} = \frac{\hbar}{2}\int d^2\sigma\sqrt{g}\Big[w^\beta U_-{}^c U_{+a}(D\tilde{T}^a)_{c\beta} - \frac{1}{2\omega_{-+}{}^+}U_-{}^\beta U_-{}^\gamma V_{+a}(D\tilde{T}^a)_{\gamma\beta}\Big] \tag{3.50a}$$

$$sA_F^{(u)} = -\frac{\hbar}{2}\int d^2\sigma\sqrt{g}\psi\Big[w^\beta U_-{}^c\left((\mathcal{D}\tilde{F})_{c\beta} - \tilde{F}_{cg}F^g{}_\beta - F_{cg}\tilde{F}^g{}_\beta\right) - \\ - \frac{1}{2\omega_{-+}{}^+}U_-{}^\beta U_-{}^\gamma\left((\mathcal{D}\tilde{F})_{\gamma\beta} - F_{\gamma g}\tilde{F}^g{}_\beta\right)\Big]\psi. \tag{3.50b}$$

I vincoli che di conseguenza impone la condizione di consistenza (3.27) sulle componenti più basse di $D\tilde{T}^a$ e di $\mathcal{D}\tilde{F}$ sono

$$(D\tilde{T})_{(\beta\gamma)} = 0 \tag{3.51a}$$

$$(\mathcal{D}\tilde{F})_{(\beta\gamma)} + F_{(\beta g}\tilde{F}^g{}_{\gamma)} = 0. \tag{3.51b}$$

E' a questo punto plausibile supporre che, almendalign ad un loop, campi composti quali $\tilde{T}^a$ e $\tilde{F}$ soggetti a queste condizioni siano tali che $\tilde{T}^a = dt^a$, e $\tilde{F} = df$. Le espressioni (3.48) sono allora dei cocicli banali, $A_u = sF_u$, dove

$$F_u = \frac{\hbar}{2}\int d^2\sigma\sqrt{g}\omega_{-+}{}^+\left(V_{+a}t^a - \psi f\psi\right); \tag{3.52}$$

le anomalie di Weyl-Lorentz sono dunque in questa convincente ipotesi vietate ad un loop dalla condizione di consistenza di Wess-Zumino. Calcoli espliciti confermano questo risultato [18]. Anche in questo caso si può estendere il risultato nel caso più generale di anomalie dipendenti dagli anticampi [12].

3.3 Sviluppo in coordinate normali

L'azione estesa ottenuta in Sez. 3.1 è altamente non lineare, e come tale non si presta ai calcoli espliciti a livello quantistico. Utilizzando lo schema formale di Sez. 2.4 sviluppiamo invece l'azione classica fino al secondo ordine nei campi quantistici, e ricaviamo le variazioni BRST dei campi quantistici al primo ordine nei campi stessi. Imponiamo quindi il gauge-fixing solo a questo punto, sull'azione sviluppata in coordinate normali. Una volta conclusa questa fase tecnica, saremo pronti per i calcoli ad una loop del prossimo capitolo.

Dividiamo l'insieme dei campi $\phi^{\mathcal{A}}$ in quattro gruppi

$$\phi^{\mathcal{A}} \equiv \left(Z^M(\sigma), \psi^r(\sigma), k_n^{\hat{\alpha}}(\sigma), q^\sigma(\sigma)\right) \tag{3.53}$$

dove Z^M sono le supercoordinate del superspazio, ψ^r i fermioni eterotici, $k_n^{\hat{\alpha}}$ sono ghosts e campi LN che trasformano come spinori di Lorentz ($\hat{\alpha}$ sta per un indice di spinore chirale $^{\alpha}$ o antichirale $_{\alpha}$), e q^σ indicano campi e ghosts che sono scalari sotto le trasformazioni di gauge e di Lorentz.

Analogamente, per i campi di background,

$$\phi_0^{\mathcal{A}} \equiv \left(q_0^\sigma(\sigma), \psi_0^r(\sigma), Z_0^M(\sigma), k_{0n}^{\hat{\alpha}}(\sigma)\right) \tag{3.54}$$

e per i campi quantistici:

$$\chi^{\hat{\mathcal{A}}} \equiv \left(Q^\sigma(\sigma), \Psi^r(\sigma), y^A(\sigma), \kappa_n^{\hat{\alpha}}(\sigma)\right). \tag{3.55}$$

Lo sviluppo di eq. (2.134) diviene ora

$$Z'^M = \Phi^M(Z_0, y) = Z_0^M + \Pi^M(Z_0, y) \tag{3.56a}$$

$$\psi' = e^{\Lambda(Z_0,y)}\left(\psi_0 + \Psi\right) \tag{3.56b}$$

$$k'_n = e^{\Sigma(Z_0,y)}\left(k_{0n} + \kappa_n\right) \tag{3.56c}$$

$$q' = q_0 + Q. \tag{3.56d}$$

Π^M, Λ e Σ (vedasi (3.58) più avanti per l'espressione esplicita) dipendono solo dal punto del superspazio Z_0^M e da y^A, Λ è a valori nell'algebra di Lie di $SO(32)$ e Σ è a valori nell'algebra di Lorentz. In particolare, per la zweibein la (3.56d) si scrive

$$e'_{\pm}{}^i = e_{0\pm}{}^i + h_{\pm}{}^i. \tag{3.57}$$

Le funzioni $\Pi^M(Z_0, y)$, $\Lambda(Z_0, y)$ e $\Sigma(Z_0, y)$ di eq. (3.56) sono specificate dalla richiesta della covarianza di gauge e Lorentz dell'espansione in campi quantistici dei funzionali come l'azione I, eq. (1.68). Il significato geometrico di Π^M è che permette di definire le variabili y^A come vettori tangenti alla geodetica che unisce l'origine delle coordinate normali Z_0 al punto Z del superspazio. Per maggiori dettagli su Π^M e Λ vedasi ref. [19] e ref. [21] rispettivamente. Fino al secondo ordine in y^A

$$\Pi^M = y^B E_B{}^M + \frac{1}{2} y^B y^C D_C E_B{}^M + o(y^3) \tag{3.58a}$$

$$\Lambda = y^B A_B + \frac{1}{2} y^B y^C D_C A_B + o(y^3), \tag{3.58b}$$

$$\Sigma_f{}^g = y^C \Omega_{Cf}{}^g + \frac{1}{2} y^C y^D D_D \Omega_{Cf}{}^g + o(y^3), \tag{3.58c}$$

dove D_D è la derivata covariante di Lorentz (e *non* di gauge). L'azione di D_D sulla connessione $\Omega_{Cf}{}^g$ è definita come $D_D\Omega_{Cf}{}^g = \partial_D\Omega_{Cf}{}^g - \Omega_{DC}{}^E\Omega_{Ef}{}^g$. La trasformazione canonica in (2.140) relativa allo sviluppo (3.56) induce poi le trasformazioni sugli anticampi (2.142) che sono esplicitamente

$$Z'*_M = y^*_A \left(\frac{\partial \Pi^M}{\partial y^A}\right)^{-1} \tag{3.59a}$$

$$\psi'^* = \Psi^* e^{-\Lambda(Z_0,y)} \tag{3.59b}$$

$$k'^* = \kappa^* e^{-\Sigma(Z_0,y)} \tag{3.59c}$$

$$q'^* = Q^* \tag{3.59d}$$

unitamente alle trasformazioni

$$Z'^*_{0M} = Z^*_{0M} - y^*_A \left(\frac{\partial \Pi^N}{\partial y^A}\right)^{-1} \frac{\partial \Phi^N}{\partial Z_0^M} - \tag{3.60a}$$

$$- \Psi^* \frac{\partial \Lambda}{\partial Z_0^M}(\psi_0 + \Psi) - \kappa^* \frac{\partial \Sigma}{\partial Z_0^M}(k_0 + \kappa) \tag{3.60b}$$

$$\psi'^*_0 = \psi^*_0 - \Psi^* \tag{3.60c}$$

$$k'^*_0 = k^*_0 - \kappa^* \tag{3.60d}$$

$$q'^* = q^*_0 - Q^*. \tag{3.60e}$$

L'azione estesa (2.143) $S[\phi_0, \chi, \mathcal{E}; \phi_0^*, \chi^*]$ che si ottiene da tali trasformazioni consiste nell'azione classica sviluppata in coordinate normali $I[\phi_0, \chi] \equiv I[\Phi(\phi_0, \chi)]$ e nei termini proporzionali agli anticampi che danno la legge delle trasformazioni BRST.

Un funzionale scalare che, come l'azione (1.68), dipende da Z^M solo attraverso $V_i{}^A(Z)$ e le componenti piatte delle connessioni e delle curvature, può essere sviluppato secondo lo schema di Mukhi,

$$I[\phi_0, \chi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Delta^n I[Z_0, \psi_0 + \Psi, q_0 + Q] \tag{3.61}$$

dove l'operatore Δ è definito dalle relazioni

$$\Delta V_i{}^A = D_i y^A + V_i{}^B y^C T_{CB}{}^A \tag{3.62a}$$

$$\Delta \Omega_{iA}{}^B = V_i{}^C y^D R_{DCA}{}^B \tag{3.62b}$$

$$\Delta A_i = V_i{}^C y^D F_{DC} \tag{3.62c}$$

$$\Delta T_{A\cdots}{}^{B\cdots} = y^C \mathcal{D}_C T_{A\cdots}{}^{B\cdots} \tag{3.62d}$$

$$\Delta y^A = 0, \qquad \Delta D_i y^A = y^B V_i{}^C y^D R_{DCB}{}^A \tag{3.62e}$$

$$\Delta(\psi_0 + \Psi) = 0 = \Delta(q_0 + Q), \tag{3.62f}$$

$D_i y^A = \partial_i y^A + y^B \Omega_{iB}{}^A$ e $T_{A\cdots}{}^{B\cdots}$ è un qualunque tensore di Lorentz e di Yang-Mills. L'espansione di $V_i{}^A(Z)$ fino al secondo ordine in y^A è

$$\begin{aligned} V_i{}^A(Z) = \partial_i Z^M E_M{}^A(Z) &= \partial_i Z_0^M E_M{}^A + D_i y^A + \partial_i Z_0^M E_M{}^C y^B T_{BC}{}^A \\ &+ \frac{1}{2} D_i y^C y^B T_{BC}{}^A + \frac{1}{2} \partial_i Z_0^M E_M{}^D y^E T_{ED}{}^C y^B T_{BC}{}^A \\ &+ \frac{1}{2} \partial_i Z_0^M E_M{}^C y^B y^D D_D T_{BC}{}^A + \frac{1}{2} y^D \partial_i Z_0^M E_M{}^C y^B R_{BCD}{}^A + o(y^3). \end{aligned} \tag{3.63}$$

Nel secondo membro di questa espressione la dipendenza da y^A è solo esplicita, i campi sono tutti valutati in Z_0.

L'azione mantiene l'invarianza BRST dopo lo sviluppo in coordinate normali grazie alla trasformazione dei termini lineari negli anticampi dovute alle (3.59) e (3.60). Un metodo conveniente per trattare le invarianze BRST dell'azione sviluppata consiste nello scegliere

$$\mathcal{E}^{\mathcal{A}} = S^{\mathcal{A}}[\phi_0], \tag{3.64}$$

ovvero introdurre un'invarianza classica dei campi di background che mimi l'invarianza presente nell'azione prima di introdurre lo sviluppo in coordinate normali. La scelta (3.64) (sempre possibile, in quanto i campi $\mathcal{E}^{\mathcal{A}}$ sono stati introdotti arbitrariamente) induce infatti il termine lineare negli anticampi $\phi^*_{0\mathcal{A}} S^{\mathcal{A}}[\phi_0]$ cui corrispondono le trasformazioni BRST dei campi di background $s\phi_0^{\mathcal{A}} = S^{\mathcal{A}}[\phi_0]$, ovvero le (3.3), (3.5) e (3.7) per $\phi = \phi_0$. Le variazioni BRST dei campi quantistici $\chi^{\hat{\mathcal{A}}}$ possono essere lette dai termini lineari in $\chi^*_{\hat{\mathcal{A}}}$ nell'azione $S[\phi_0, \chi; \phi_0^*, \chi^*]$.

Poiché conosciamo $s\phi^{\mathcal{A}}$ ed $s\phi_0^{\mathcal{A}}$, è tuttavia più rapido un procedimento operativo secondo lo schema seguente. Consideriamo, ad esempio, l'espansione di $sZ^M E_M{}^A(Z)$, che

ricaviamo in analogia con l'espansione di $V_i{}^A(Z)$ di eq. (3.63):

$$\begin{aligned} sZ^M E_M{}^A(Z) &= sZ_0^M E_M{}^A + (sy^A + y^D sZ_0^M E_M{}^E \Omega_{ED}{}^A) + sZ_0^M E_M{}^C y^B T_{BC}{}^A \\ &+ \frac{1}{2}(sy^C + y^D sZ_0^M E_M{}^E \Omega_{ED}{}^C) y^B T_{BC}{}^A + \frac{1}{2} sZ_0^M E_M{}^D y^E T_{ED}{}^C y^B T_{BC}{}^A \\ &+ \frac{1}{2} sZ_0^M E_M{}^C y^B y^D D_D T_{BC}{}^A + \frac{1}{2} y^D sZ_0^M E_M{}^C y^B R_{BCD}{}^A + o(y^3). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Come per la (3.63), i campi a secondo membro sono tutti calcolati in Z_0. Essendo noto il primo membro di questa equazione e l'espressione per sZ_0^M questa equazione può essere risolta perturbativamente in sy^A. Notiamo che sy^A appare nella (3.65) sempre nella combinazione $\mathcal{S}y^A \stackrel{\text{def}}{=} sy^A + y^B S^C \Omega_{CB}{}^A$ che potremmo chiamare "variazione BRST Lorentz-covariante" in analogia con il differenziale Lorentz-covariante $Dy^A = dy^A + y^B E^C \Omega_{CB}{}^A$; tutti gli altri termini sono Lorentz-covarianti. Si ha

$$sZ_0^M E_M{}^A(Z_0) = S^A(\phi_0) \tag{3.66a}$$

$$sZ^M E_M{}^A(Z) = S^A(\phi) = S^A(\phi_0) + \chi^{\hat{\mathcal{A}}} \mathcal{D}_{\hat{\mathcal{A}}} S^A[\phi_0] + o(\chi^2), \tag{3.66b}$$

dove $\chi^{\hat{\mathcal{A}}} \mathcal{D}_{\hat{\mathcal{A}}} S^A[\phi_0]$ è una scrittura formale che indica lo sviluppo al primo ordine nei campi quantistici di S^A; la (3.65) al primo ordine in y^A è

$$S^A[\phi] = S^A[\phi_0] + \mathcal{S}y^A + S^C y^B T_{BC}{}^A + o(y^2) \tag{3.67}$$

e grazie alla (3.66b) si risolve in sy^A,

$$sy^A = -y^B S^C \Omega_{CB}{}^A + y^B S^C T_{CB}{}^A + \chi^{\hat{\mathcal{A}}} \mathcal{D}_{\hat{\mathcal{A}}} S^A + o(\chi^2). \tag{3.68}$$

Nel caso specifico dell'invarianza κ, si ha $s_\kappa Z^M E_M{}^A = w^A$, dove $w^a = 0$ e w^α è stato definito in eq. (3.2a), $w^\alpha(\phi) = (\not{V}(Z) k_0)^\alpha$; usando l'espansione per i ghosts k (3.56c), $k = e^{\Sigma(Z_0, y)}(k_0 + \kappa)$, e ricordando la definizione di L di eq. (3.2c), la (3.68) per le variazioni κ diviene

$$s_\kappa y^a = -y^c L_c{}^a - w^\gamma y^B T_{B\gamma}{}^a + o(y^2) \tag{3.69a}$$

$$s_\kappa y^\alpha = (\not{V}_- \kappa)^\alpha - y^\beta L_\beta{}^\alpha - w^\gamma y^B T_{B\gamma}{}^\alpha + h_-{}^i (\not{V}_i k_0)^\alpha \tag{3.69b}$$

$$+ \left(D_- y^a + V_-{}^b y^c T_{cb}{}^a + 2 V_-{}^\beta y^\gamma \Gamma^a_{\gamma\beta} \right) \Gamma_a^{\alpha\varepsilon} k_{0\varepsilon} + o(\chi^2). \tag{3.69c}$$

I termini di ordine successivo in χ^2 (e dunque in y^2, κ^2) sono tutti Lorentz-covarianti. I termini a secondo membro sono tutti calcolati in ϕ_0, in particolare $w^\alpha \equiv w^\alpha(\phi_0) = (\not{V}_-(Z_0)k_0)^\alpha$, e $L_f{}^g = L_f{}^g(\phi_0) = w^\alpha(\phi_0)\Omega_{\alpha f}{}^g(Z_0)$.

L'azione delle trasformazioni κ BRST sul campo quantistico Ψ associato ai fermioni eterotici si ricava con la stessa tecnica. In virtù della (3.56b) si ha l'espansione in coordinate normali

$$\begin{aligned}\big(\partial_i - A_i(Z)\big)\psi = e^\Lambda\Big[&(\partial_i - A_i(Z_0))(\psi_0+\Psi) - \Big(V_i{}^A y^B F_{BA} + \\ &+ \frac{1}{2}\left(D_i y^A + V_i{}^C y^D T_{DC}{}^A\right) y^B F_{BA} + \frac{1}{2} V_i{}^A y^B y^C \mathcal{D}_C F_{BA} + o(y^3)\Big)(\psi_0+\Psi)\Big], \end{aligned} \tag{3.70}$$

cui corrisponde l'espansione relativa alle trasformazioni BRST

$$\begin{aligned}s\psi - sZ^M A_M\psi = e^\Lambda\Big[&s\psi_0 - sZ_0^M A_M\psi_0 + s\Psi - sZ_0^M A_M\Psi - \\ &- \Big(sZ_0^M E_M{}^A y^B F_{BA} + \frac{1}{2}(sy^A + y^E sZ_0^M \Omega_{ME}{}^A + sZ_0^M E_M{}^C y^D T_{DC}{}^A) y^B F_{BA} \\ &+ \frac{1}{2} sZ_0^M E_M{}^A y^B y^C \mathcal{D}_C F_{BA} + o(y^3)\Big)(\psi_0+\Psi)\Big]. \end{aligned} \tag{3.71}$$

che può essere risolta iterativamente per la combinazione "BRST gauge-covariante" $\mathcal{S}\Psi \stackrel{\text{def}}{=} s\psi - sZ_0^M A_M\Psi$ (analoga al differenziale gauge-covariante $\mathcal{D}\Psi = d\Psi - dZ_0^M A_M\Psi$). La (3.71) al primo ordine in y^A si scrive

$$\mathcal{S}\psi = \mathcal{S}\psi_0 + \mathcal{S}\Psi - S^A y^B F_{BA} + o(y^2). \tag{3.72}$$

Considerando solo le variazioni κ, $S^A \equiv w^A$, si ha

$$s_\kappa\psi_0 = C(\phi_0)\psi_0 \tag{3.73a}$$

$$s_\kappa\psi = C(\phi)\psi = C(\phi_0)\psi + C(\kappa)\psi + y^A\mathcal{D}_A C(\phi_0)\psi + o(y^2); \tag{3.73b}$$

$C(\phi)$ è stato definito in eq. (3.2b), $C = w^\alpha A_\alpha$ e abbiamo definito $C(\kappa) = w^\alpha(\kappa)A_\alpha(Z_0) = (\not{V}_-(Z_0)\kappa)^\alpha A_\alpha(Z_0)$. Usando l'espansione per i ghosts k (3.56c), la (3.72) ci fornisce $s_\kappa\Psi$ al primo ordine in y^A e κ,

$$s_\kappa\Psi = C\Psi + C(\kappa)\psi_0 + w^\alpha y^b F_{b\alpha}\psi_0 + o(y^2). \tag{3.74}$$

Tutti i termini a secondo membro sono calcolati in Z_0.

Le trasformazioni κ BRST delle zweibein quantistiche $h_{\pm}{}^{i}$ sono ottenute espandendo le

$$s_\kappa e_-{}^i = 0 \tag{3.75a}$$

$$s_\kappa e_+{}^i = -4 e_-{}^i \mathcal{V}_+{}^\varepsilon k_\varepsilon \tag{3.75b}$$

richiedendo che $e_{0\pm}{}^i$ abbia le stesse variazioni nei campi ϕ_0. Le variazioni κ della fluttuazione quantistica della metrica sono in conseguenza di ciò

$$\delta_\kappa h_-{}^i = 0 \tag{3.76a}$$

$$\begin{aligned}\delta_\kappa h_+{}^i = &-4 e_{0-}{}^i \mathcal{V}_+{}^\varepsilon \kappa_\varepsilon - 4 h_-{}^i \mathcal{V}_+{}^\varepsilon k_{0\varepsilon} - \\ &- 4 e_{0-}{}^i \left(D_+ y^\varepsilon + V_+{}^B y^C T_{CB}{}^\varepsilon + \frac{1}{2} \psi_0 y^A \mathcal{D}_A \chi^\varepsilon \psi_0 \right) k_{0\varepsilon} + o(y^2).\end{aligned} \tag{3.76b}$$

Le trasformazioni κ BRST dei ghost quantistici κ_n si ottengono in analogia con il calcolo relativo ai fermioni eterotici Ψ. In virtù della (3.56c) si ha l'espansione in coordinate normali

$$\begin{aligned}\big(\partial_i - \Omega_i(Z)\big) k_n = e^\Sigma \Big[&(\partial_i - \Omega_i(Z_0))(k_{0n} + \kappa_n) - \Big(V_i{}^A y^B R_{BA} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(D_i y^A + V_i{}^C y^D T_{DC}{}^A \right) y^B R_{BA} + \frac{1}{2} V_i{}^A y^B y^C D_C R_{BA} + o(y^3) \Big) (k_{0n} + \kappa_n) \Big]\end{aligned} \tag{3.77}$$

del tutto analoga all'espansione (3.70), cui corrisponde l'espansione relativa alle trasformazioni BRST

$$\begin{aligned}s k_n - s Z^M \Omega_M k_n = e^\Lambda \Big[&s k_{0n} - s Z_0^M \Omega_M k_{0n} + s\kappa_n - s Z_0^M \Omega_M \kappa_n - \\ &- \Big(s Z_0^M E_M{}^A y^B R_{BA} + \frac{1}{2} (s y^A + y^E s Z_0^M \Omega_{ME}{}^A + s Z_0^M E_M{}^C y^D T_{DC}{}^A) y^B R_{BA} \\ &+ \frac{1}{2} s Z_0^M E_M{}^A y^B y^C D_C R_{BA} + o(y^3) \Big) (k_{0n} + \kappa_n) \Big]\end{aligned} \tag{3.78}$$

che può essere risolta iterativamente per la combinazione "BRST Lorentz-covariante" $\mathcal{S}\kappa_n \stackrel{\text{def}}{=} s\kappa_n + s Z_0^M \Omega_M \kappa_n$. La (3.78) al primo ordine in y^A si scrive

$$\mathcal{S}\kappa_n = \mathcal{S} k_{0n} + \mathcal{S}\kappa_n - S^A y^B R_{BA} + o(y^2). \tag{3.79}$$

Consideriamo specificatamente le variazioni κ (v. Eq. (3.7):

$$s_\kappa k_{0n} = L(\phi_0) k_n + (\not{V}_- k_{0(n+1)}) + F_n(\phi_0) \tag{3.80a}$$

$$\begin{aligned}s_\kappa k_n &= L(\phi) k_n \\ &= L(\phi_0) k_n + (\not{V}_- k_{0(n+1)}) + L(\kappa) k_n \qquad (3.80b) \\ &\quad + (\not{V}_- \kappa_{n+1}) + y^A \mathcal{D}_A L(\phi_0) k_n + F_n(\phi) + o(y^2). \qquad (3.80c)\end{aligned}$$

L è stato definito in Eq. (3.2c), ed $L_f{}^g(\kappa) = w^\alpha(\kappa)\Omega_{\alpha f}{}^g = (\not{V}_-(Z_0)\kappa)^\alpha\Omega_{\alpha f}{}^g(Z_0)$. $F_n(\phi)$ è stato introdotto in Eq. (3.7). Usando l'espansione (3.56c) per i ghosts k_n la (3.79) ci fornisce $s_\kappa\kappa_n$ al primo ordine in y^A,

$$\begin{aligned} s_\kappa\kappa_n &= \not{V}_-\kappa_{n+1} + G_n \\ &= L\kappa_n + (\not{V}_-\kappa_{n+1}) + L(\kappa)k_{0n} + F_n(\phi) - F_n(\phi_0) + w^\alpha y^b R_{b\alpha}k_{0n} + o(y^2). \end{aligned} \tag{3.81}$$

G_n rappresenta contributi che non dipendono da κ_{n+1}. Notiamo che, grazie allo sviluppo di coordinate normali, il settore minimale dei ghosts κ_n, $n \geq 1$, ha ora un capostipite, y^α, che è uno spinore dieci-dimensionale come i ghosts κ_n della chiralità corretta per l'alternanza di chiralità dei ghosts κ_n. Possiamo allora considerare formalmente $\kappa_0^\alpha \equiv y^\alpha$. Nel contesto della superstringa di Green-Schwarz con un background curvo la costruzione di Ref. [9] del superspinore $\boldsymbol{\kappa}$ di $OSp(10|2)$ va dunque effettuata nel settore quantistico:

$$\boldsymbol{\kappa} = (y^\alpha, \kappa_\alpha, \kappa_2^\alpha, \cdots). \tag{3.82}$$

3.3.1 Gauge fixing

Le condizioni di gauge sono imposte più agevolmente dopo aver sviluppato l'azione, i campi e le simmetrie in coordinate normali, e dunque solo ora diamo le condizioni di gauge. Per fissare i diffeomorfismi di world-sheet e l'invarianza di Weyl e di Lorentz in $d = 2$ imponiamo la condizione sulla zweibein quantistica,

$$h_\pm{}^i = 0. \tag{3.83}$$

Il settore non minimale relativo a tali simmetrie è costituito dagli antighost b_{ij} relativi ai ghost c^i dei diffeomorfismi e dagli antighost $b_+{}^+$ e $b_-{}^-$ relativi ai ghost $u_+{}^+$ ed $u_-{}^-$ delle simmetrie di Weyl±Lorentz. Con tali antighost costruiamo il campo $b^\pm{}_i$,

$$b^\pm{}_i = e^{\pm i}(b_{ij} + \frac{1}{2}(e_+{}^i e_-{}^j b_+{}^+ + e_+{}^i e_-{}^j b_-{}^-)), \tag{3.84}$$

e di conseguenza il fermione di gauge è

$$\Psi = \int d^2\sigma\sqrt{g}b^\pm{}_i h_\pm{}^i. \tag{3.85}$$

Per quanto riguarda l'invarianza κ, fino ad ora non è nota alcuna procedura di quantizzazione covariante di Lorentz in $D = 10$. Siamo dunque obbligati ad adottare un gauge fixing

non covariante [28]. Per fissare l'invarianza κ introduciamo due vettori dieci-dimensionali costanti di tipo luce m^a, n^a che soddisfano alle

$$\begin{aligned} m^a n_a &= \frac{1}{2} \\ m^a m_a &= 0 = n^a n_a \end{aligned} \tag{3.86}$$

cosicché le matrici $\not{m} \equiv m_a \Gamma^a$, $\not{n} \equiv n_a \Gamma^a$ possono essere usate per proiettare spinori di $SO(10)$ in spinori di $SO(8)$. La condizione principale di gauge che imponiamo è

$$\not{n}_{\alpha\beta} y^\beta = 0; \tag{3.87}$$

inoltre vincoliamo la connessione di background $\Omega_{ia}{}^b(Z_0)$ ad essere nulla lungo la direzione n,

$$\Omega_{iab} n^b = 0 \tag{3.88}$$

in modo tale che la derivata covariante preservi la condizione (3.87),

$$\not{n}_{\alpha\beta} D_i y^\beta = 0. \tag{3.89}$$

Come conseguenza della (3.88) otteniamo un'azione invariante per $SO(8)$ grazie alla quale possiamo risalire all'azione invariante per $SO(10)$ covariantizzando rispetto a quest'ultima algebra. Questa procedura si basa sulla esistenza in linea di principio di una procedura di quantizzazione $SO(10)$-Lorentz covariante.

La condizione (3.87) fissa l'invarianza κ di primo livello. E' però necessario fissare anche le simmetrie secondarie dovute all'infinita riducibilità del modello. A tal scopo introduciamo delle condizioni di gauge analoghe alla (3.87) sui campi quantistici di ghosts, antighosts, campi NL e ghosts secondari relativi all'invarianza κ che coinvolgono alternativamente i vettori costanti m^a ed n^a [28]. Ora espliciteremo queste condizioni e dimostreremo che queste, assieme alle relative equazioni del moto, implicano che l'intera catena di ghosts κ quantistici non si propaga in questa gauge e dunque si può eliminare completamente.

3.3.2 Eliminazione del settore quantistico κ

Applichiamo ora i risultati di Sez. 2.1.6 sui sistemi riducibili al settore dei ghosts κ che è caratterizzato da un grado di riducibilità infinito. Il settore minimale relativo all'invarianza κ è $\phi_{\rm nm} = (\varphi^i, k_\alpha, k_2^\alpha, k_{3\alpha}, \cdots)$. Il settore non minimale è composto dai ghosts ed

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \kappa_0^{0\alpha} \equiv y^\alpha & & & & \\
 & & & \kappa_{1\alpha}^1 & & & \kappa_{1\alpha}^0 \equiv \kappa_\alpha & & \\
 & & \kappa_2^{2\alpha} & & \kappa_2^{1\alpha} & & & \kappa_2^{0\alpha} \equiv \kappa_2^\alpha & \\
\kappa_{3\alpha}^3 & & & \kappa_{3\alpha}^2 & & & \kappa_{3\alpha}^1 & & \kappa_{3\alpha}^0 \equiv \kappa_{3\alpha} \\
 & \vdots & & & \vdots & & & \vdots &
\end{array}
$$

Settore completo dei ghosts κ quantistici

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \lambda_1^1 & & \\
 & \lambda_2^2 & & \lambda_2^1 & \\
\lambda_3^3 & & \lambda_3^2 & & \lambda_3^1 \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Campi moltiplicatori di NL-κ quantistici

Figura 3.1: Struttura dei campi non minimali quantistici relativi all'invarianza κ

extraghosts k_n^p e dai campi ausiliari NL l_n^p, $n \geq 1$, $1 \leq p \leq n$. L'aggiunta banale del tipo (2.77) si traduce nella relazione

$$sk_n^p = l_n^p. \tag{3.90}$$

Con la scrittura k_n^p comprendiamo anche i ghosts del settore minimale k_n, intendendo $k_n^0 \equiv k_n$. Ogni ghost k_n^p ed ogni campo moltiplicatore ausiliario l_n^p sono quindi scomposti in una parte di background ed in una parte quantistica allo stesso modo dei ghosts k_n, Eq. (3.56c),

$$k_n^p = e^\Sigma(k_{0n}^p + \kappa_n^p) \tag{3.91a}$$

$$l_n^p = e^\Sigma(l_{0n}^p + \lambda_n^p). \tag{3.91b}$$

Seguendo la prescrizione (2.78) di Batalin-Vilkovisky imponiamo il gauge-fixing di cono luce (3.87) costruendo il fermione di gauge

$$\Psi = \int d^2\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \kappa_{n+1}^{n+1-p} \not{n} \not{h} \not{n} \kappa_n^p. \tag{3.92}$$

Notiamo che nella (3.92) compaiono solo i campi quantistici. Il numero di ghost dei campi è $gh(\kappa_n^p) = n$, $gh(\lambda_n^p) = n+1$. Lo schema dei campi quantistici relativi al settore κ è riportato in Fig. 3.1. y^α è il capostipite del settore non minimale dei ghosts κ_m^p quantistici, $\kappa_0^0 = y^\alpha$, e l'intero settore quantistico dei ghosts κ_n^p così costruito rappresenta un superspinore di

$OSp(10|4)$ (v. Ref. [9]). La variazione BRST di $k_n^0 \equiv k_n$ è la (3.81), quella per y^α è riportata in (3.69). La variazione κ di κ_n^p e λ_n^p per $p \geq 1$ si ottiene dalla (3.90) secondo la tecnica già descritta per ricavare $s\kappa_n$ (è riportata qui di seguito).

Diamo ora la dimostrazione del completo disaccoppiamento dei ghosts quantistici κ_n^p e dei campi NL quantistici λ_n^p dovuto al fermione di gauge (3.92). Le trasformazioni κ BRST sono le seguenti ($n \geq 0$):

$$s\kappa_n = \not{V}_- \kappa_{n+1} + G_n \tag{3.93a}$$

$$s\kappa_n^p = \lambda_n^p, \qquad p \neq 0. \tag{3.93b}$$

Riscriviamo il fermione di gauge come segue:

$$\begin{aligned}\Psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\kappa_{n+1}^{n+1} \not{n}\not{n} \kappa_n + \left(\sum_{p=1}^{n} \kappa_{n+1}^{n+1-p} \not{n}\not{n} \kappa_n^p \right) \right) \\ &= [\kappa_1^1 \not{n}\not{n} y] + [\kappa_2^2 \not{n}\not{n} \kappa_1 + (\kappa_2^1 \not{n}\not{n} \kappa_1^1)] + [\kappa_3^3 \not{n}\not{n} \kappa_2 + (\kappa_3^2 \not{n}\not{n} \kappa_2^1 + \kappa_3^1 \not{n}\not{n} \kappa_2^2)] + \cdots\end{aligned}$$

Grazie alla (2.66) di Sez. 2.1.5 per fissare la gauge è sufficiente aggiungere all'azione la variazione BRST

$$\begin{aligned}s\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[&\lambda_{n+1}^{n+1} \not{n}\not{n} \kappa_n + 2n_- \kappa_{n+1}^{n+1} \not{n} \kappa_{n+1} + \kappa_{n+1}^{n+1} \not{n}\not{n} G_n - \kappa_{n+1}^{n+1} \not{n} \not{V}_- \not{n} \kappa_{n+1} \\ &+ \sum_{p=1}^{n} \left(\kappa_{n+1}^{n+1-p} \not{n}\not{n} \lambda_n^p + \lambda_{n+1}^{n+1-p} \not{n}\not{n} \kappa_m^p \right) \Big].\end{aligned}$$

Scriviamo esplicitamente la somma termine per termine;

$$\begin{aligned}s\Psi = &\Big[\lambda_1^1 \not{n}\not{n} y + \kappa_1^1 \left(\not{n}\not{n} G_0 + 2n_- \not{n} \kappa_1 - \not{n} \not{V}_- \not{n} \kappa_1 \right) \Big] \\ &+ \Big[\lambda_2^2 \not{n}\not{n} \kappa_1 + \kappa_2^2 \left(\not{n}\not{n} G_1 + 2n_- \not{n} \kappa_2 - \not{n} \not{V}_- \not{n} \kappa_2 \right) \\ &\quad + (\kappa_2^1 \not{n}\not{n} \lambda_1^1 + \lambda_2^1 \not{n}\not{n} \kappa_1^1) \Big] \\ &+ \Big[\lambda_3^3 \not{n}\not{n} \kappa_2 + \kappa_3^3 \left(\not{n}\not{n} G_2 + 2n_- \not{n} \kappa_3 - \not{n} \not{V}_- \not{n} \kappa_3 \right) \\ &\quad + (\kappa_3^2 \not{n}\not{n} \lambda_2^1 + \lambda_3^2 \not{n}\not{n} \kappa_2^1) + (\kappa_3^1 \not{n}\not{n} \lambda_2^2 + \lambda_3^1 \not{n}\not{n} \kappa_2^2) \Big] \\ &+ \Big[\lambda_4^4 \not{n}\not{n} \kappa_3 + \kappa_4^4 \left(\not{n}\not{n} G_3 + 2n_- \not{n} \kappa_4 - \not{n} \not{V}_- \not{n} \kappa_4 \right) \\ &\quad + (\kappa_4^3 \not{n}\not{n} \lambda_3^1 + \lambda_4^3 \not{n}\not{n} \kappa_3^1) + (\kappa_4^2 \not{n}\not{n} \lambda_3^2 + \lambda_4^2 \not{n}\not{n} \kappa_3^2) \\ &\quad + (\kappa_4^1 \not{n}\not{n} \lambda_3^2 + \lambda_4^1 \not{n}\not{n} \kappa_3^3) \Big] \\ &+ \cdots\end{aligned}$$

Definiamo ora i ghosts κ'_n ottenuti traslando la proiezione in $\not{n}$ di κ_n:

$$\kappa'_n = \kappa_n + \frac{1}{2n_-}\not{n}G_{n-1}, \qquad n \geq 1. \tag{3.94}$$

L'integrazione sui campi κ_n^p e λ_n^p impone le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^1 \to \not{n}y = 0, \not{n}\kappa_2^1 = 0\\
&\lambda_2^2 \to \not{n}\kappa_1 = 0, \not{n}\kappa_3^1 = 0\\
&\lambda_2^1 \to \not{n}\kappa_1^1 = 0, \not{n}\kappa_3^2 = 0\\
&y \to \not{n}\lambda_1^1 = 0\\
&\kappa'_1 \to \not{n}\kappa_1^1 = 0\\
&\kappa_1^1 \to 2n_-\kappa'_1 = 0, \not{n}\lambda_2^1 = 0\\
&\kappa_2^1 \to \not{n}\lambda_1^1 = 0, \not{n}\lambda_3^2\\
&\dots
\end{aligned}$$

Esse comportano:

1. l'imposizione della condizione di gauge

$$\not{n}y = 0 \tag{3.95}$$

2. l'annullamento di tutti i ghosts κ_n^p (eccetto κ_0^0)

$$\kappa_n^p = 0 \tag{3.96}$$

3. l'annullamento di tutti i campi ausiliari λ_n^p

$$\lambda_n^p = 0. \tag{3.97}$$

L'intero settore dei ghosts κ_n^p quantistici e dei campi ausiliari λ_n^p quantistici è dunque stato eliminato dal gauge fixing di cono-luce (3.92). I ghosts di background k_{0n}^p ed i campi ausiliari di background l_{0n}^p sono campi esterni alla teoria e quindi è sempre possibile annullarli. Manterremo non nullo il solo ghost di esterno k_0 di primo livello che ci sarà necessario per i calcoli dell'anomalia ad un loop.

Naturalmente i ghosts e gli antighosts relativi ai diffeomorfismi si propagano ed in una trattazione completa essi vanno considerati. Tuttavia l'obiettivo del presente lavoro è il calcolo dell'anomalia κ ad un loop, e ci si aspetta che i ghosts dei diffeomorfismi non vi contribuiscano.

Riportiamo di seguito le espressioni per le variazioni BRST κ dei soli campi quantistici non nulli y^A e Ψ al primo ordine in y^A e Ψ che, in conseguenza del gauge-fixing (3.83), (3.96) e (3.97) sono ora

$$s_\kappa y^a = -y^b L_b{}^a - w^\gamma y^B T_{B\gamma}{}^a + o(y^2) \tag{3.98a}$$

$$s_\kappa y^\alpha = -y^\beta L_\beta{}^\alpha - w^\gamma y^B T_{B\gamma}{}^\alpha + y^B \mathcal{D}_B w^\alpha + o(y^2) \tag{3.98b}$$

$$s_\kappa \Psi = C\Psi + w^\alpha y^b F_{b\alpha} + o(\chi^2), \tag{3.98c}$$

dove le espressioni w^α, C ed $L_f{}^g$ coinvolgono il ghost di background $k_{0\alpha}$. Le trasformazioni delle y^A e di Ψ sono dunque la combinazione di una trasformazione locale rispettivamente di Lorentz di parametro $L_A{}^B$, di gauge di parametro C, e di una trasformazione κ "intrinseca" gauge- e Lorentz-covariante.

Concludiamo questa sezione fornendo l'espressione per l'azione classica $I[\phi_0, \chi]$ sviluppata in coordinate normali al secondo ordine in y^A; tale espressione ci permetterà di costruire i propagatori ed i vertici necessari per i calcoli ad un loop che intendiamo svolgere. Per ottenere l'espansione nelle variabili quantistiche si sono anche utilizzati i vincoli classici (1.51) del sistema SUGRA-SYM dei campi di background e le relazioni (1.52) tra le componenti delle curvature. Usando la gauge (3.83), il risultato fino al secondo ordine nei campi quantistici è $I[\phi_0, \chi] = I[\phi_0] + \int d^2\sigma L_2[\phi_0, \chi]$, dove

$$\begin{aligned} L_2 = \sqrt{g}\Big[& y^\alpha V_-{}^a (\Gamma_a)_{\alpha\beta} D_+ y^\beta - \frac{1}{2} D_- y_a D_+ y^a - 2 D_- y^a V_+{}^\beta y^\alpha (\Gamma_a)_{\alpha\beta} \\ & + 2 V_-{}^a V_+{}^b y^\alpha T_{cb}{}^\varepsilon (\Gamma_a)_{\varepsilon\alpha} y^c - \frac{1}{4} V_-{}^a V_+{}^\alpha y_d y^\gamma (\Gamma_a)_{\alpha\varphi} (\Gamma_{bc})^\varphi{}_\gamma T^{bcd} \\ & - \frac{1}{2} V_-{}^a V_+{}^b y^d y^c R_{dacb} + \frac{1}{2} D_- y^a V_+{}^b T_{gba} y^g - V_-{}^\beta V_+{}^b T_{cb}{}^\alpha y^c y^g (\Gamma_g)_{\alpha\beta} \\ & + \frac{1}{4} V_-^a V_+^b y^\delta y^\gamma (\Gamma_{acd})_{\delta\gamma} T^{cd}{}_b + V_-^a V_+{}^\alpha T_{\delta\alpha}{}^\beta (\Gamma_a)_{\beta\gamma} y^\delta y^\gamma - 2 V_-{}^\alpha V_+{}^\beta (\Gamma^g)_{\alpha\delta} (\Gamma_g)_{\beta\gamma} y^\gamma y^\delta \\ & + \frac{1}{2} \Psi \mathcal{D}_- \Psi \Big] + o(\Psi y) + o(\psi_0^2 y^2). \end{aligned} \tag{3.99}$$

I termini di ordine $o(\Psi y) + o(\psi_0^2 y^2)$ non ci saranno necessari e quindi non ne riportiamo l'espressione esplicita.

Capitolo 4

Calcolo esplicito delle anomalie

Nel limite di bassa energia le teorie di superstringa si riducono alle relative teorie di supergravità la cui dinamica è descritta da appropriate azioni effettive. Tali azioni effettive sono state derivate direttamente calcolando le ampiezze di stringa (vedasi ad esempio [8]) o facendo riferimento all'invarianza di Weyl, imponendo l'annullamento delle funzioni beta dei modelli sigma associati (vedasi ad esempio [27, 31]). Queste procedure sono state applicate quasi esclusivamente alla formulazione NSR delle superstringhe, e dunque in un contesto di supersimmetria non a vista; la tecnica delle funzioni beta è stata utilizzata comunque anche nell'ambito della formulazione di Green-Schwarz [17, 18, 24].

Nell'ambito della formulazione di Green-Schwarz delle superstringhe è tuttavia possibile una procedura per il calcolo di azioni effettive supersimmetriche a vista che non richiede la conoscenza delle ampiezze di stringa né il calcolo delle funzioni beta, e fa uso invece dell'invarianza fermionica locale κ caratteristica di tale formulazione [12]. Lo schema di tale procedura è stato delineato precedentemente: esso si basa sul modello sigma di Green-Schwarz immerso nel background di supergravità in superspazio che ne descrive il settore a massa nulla.

L'invarianza κ dell'azione di modello sigma a livello classico implica vincoli sulle torsioni e curvature di background che, unite alle identità di Bianchi, portano alle equazioni del moto per i campi di background. Nel primo capitolo si è verificato che l'invarianza del modello sigma associato alla superstringa eterotica richiede come background, all'ordine zero nella costante di accoppiamento di stringa α', il modello SUGRA-SYM disaccoppiato.

La quantizzazione del modello sigma può dare origine ad anomalie κ, la cui forma è

fortemente vincolata dalla condizione di consistenza di Wess-Zumino. Sappiamo dalla discussione di Sez. 3.2 che le soluzioni non banali di tale problema coomologico sono tali che le relative anomalie κ possono sempre (almendalign ad un loop) essere assorbite modificando opportunamente i vincoli (classici) di torsioni e curvature di background. La soluzione delle identità di Bianchi per questi nuovi vincoli dà le nuove equazioni del moto e dunque l'azione effettiva supersimmetrica a vista con le correzioni di stringa.

Questa procedura è consistente solo se svolta loop per loop, ovvero ordine per ordine in α': l'azione effettiva è dunque ottenuta come una serie di potenze in α' con supersimmetria a vista valida ordine per ordine. Come indicato precedentemente viè inoltre il vantaggio che le correzioni all'azione effettiva sono ottenute con calcoli ad un ordine di loop inferiore rispetto alla tecnica delle funzioni beta.

In questo capitolo dimostreremo la convenienza e l'eleganza della procedura in esame svolgendo il calcolo perturbativo dell'anomalia κ relativa al termine di Chern-Simons di Yang-Mills e quello, più interessante perché non è mai stato svolto precedentemente, dell'anomalia κ relativa al termine di Chern-Simons di Lorentz. Come vedremo, nello svolgimento di questo calcolo si presentano alcuni problemi in relazione alla presenza di divergenze infrarosse: sarà discussa in proposito una congettura sulla loro cancellazione strettamente connessa ai requisiti di località e di consistenza delle anomalie κ.

L'azione sviluppata in coordinate normali (3.99) è invariante sotto le trasformazioni κ (3.98) nell'ipotesi che il background sia on-shell. Tale azione è anche invariante per trasformazioni di Yang-Mills e di Lorentz che coinvolgono sia i campi di background che i campi quantistici. Le trasformazioni di Yang-Mills sono

$$\begin{aligned} \delta_G A_i &= \mathcal{D}_i \mathcal{C} \equiv \partial_i \mathcal{C} + \mathcal{C} A_i - A_i \mathcal{C} \\ \delta_G \Psi &= \frac{1+\gamma_3}{2} \mathcal{C} \Psi, \end{aligned} \tag{4.1}$$

dove abbiamo reintrodotto la notazione in due componenti per i fermioni eterotici quantistici Ψ. Le trasformazioni locali di Lorentz sono

$$\begin{aligned} \delta_L \Omega_{iA}{}^B &= D_i \mathcal{L}_A{}^B \equiv \partial_i \mathcal{L}_A{}^B + \mathcal{L}_A{}^C \Omega_{iC}{}^B - \Omega_{iA}{}^C \mathcal{L}_C{}^B \\ \delta_L y^A &= -y^B \mathcal{L}_B{}^A \\ \delta_L V_i{}^A &= -V_i{}^B \mathcal{L}_B{}^A \\ \delta_L T_{A\cdots}{}^{B\cdots} &= \mathcal{L}_A{}^C T_{C\cdots}{}^{B\cdots} - T_{A\cdots}{}^{C\cdots} \mathcal{L}_C{}^B + \cdots . \end{aligned} \tag{4.2}$$

$\mathcal{C}$ è un parametro locale a valori nell'algebra di Lie, $\mathcal{C} = \mathcal{C}^I T^I$, e $\mathcal{L}$ è un parametro a valori nell'algebra di Lorentz, $\mathcal{L}_a{}^\alpha = \mathcal{L}_\alpha{}^a = 0$, $\mathcal{L}_\alpha{}^\beta = \frac{1}{4}(\Gamma^{ab})_\alpha{}^\beta \mathcal{L}_{ab}$; come di consueto, $\mathcal{D}_i$ e D_i sono le derivate covarianti indotte di gauge e di Lorentz rispettivamente, e $T_{A\ldots}{}^{B\cdots}$ indica un qualunque tensore di Lorentz.

Queste trasformazioni, come vedremo, danno luogo ad "anomalie". Va precisato che, non essendo queste trasformazioni reali simmetrie della teoria, non si tratta di vere anomalie, quanto di un utile strumento per l'analisi delle relative anomalie κ di gauge e di Lorentz, che sono le vere anomalie del modello.

In questo capitolo reintrodurremo esplicitamente nei vertici la dipendenza da $\alpha = 2\pi\alpha'$, la costante d'accopiamento di stringa, che è sottintesa nell'azione. Tale costante svolge nei modelli sigma lo stesso ruolo della costante di Planck $h = 2\pi\hbar$.

In Sez. 4.1 calcoleremo esplicitamente la ben nota anomalia di gauge utilizzando la tecnica del "vertice anomalo", mentre in Sez. 4.2 calcoleremo l'anomalia κ di gauge. In Sez. 4.3 affronteremo il più complesso calcolo dell'anomalia di Lorentz, ed in Sez. 4.4 vedremo le differenze che comporta il calcolo dell'anomalia κ di Lorentz. In Sez. 4.5 vedremo le correzioni al modello SUGRA-SYM che comportano tali anomalie. Analizzeremo successivamente la presenza di possibili anomalie addizionali, e concluderemo con una breve discussione sulle modifiche necessarie per estendere il procedimento a due loop.

4.1 L'anomalia di Yang-Mills

In questa sezione calcoliamo l'anomalia associata alle trasformazioni di Yang-Mills combinate (4.1). La procedura più comune per calcolare le anomalie consiste nel regolarizzare l'azione classica, calcolare l'azione effettiva e quindi ottenere l'anomalia dalla variazione dell'azione effettiva. Nel seguito utilizzeremo invece la mendalign nota procedura (descritta in 2.2.3) che consiste nel regolarizzare l'azione classica e nel farne la variazione per ricavare il vertice anomalo. L'anomalia è quindi ottenuta inserendo il vertice anomalo in tutti i diagrammi di Feynman e considerando solo quelli che non si annullano quando il regolatore ϵ va a zero.

Per una corretta definizione del propagatore dei fermioni eterotici quantistici, all'azione

$$I_H = \frac{1}{2}\int d^2\sigma \sqrt{g} e_p{}^i \bar{\Psi}\gamma^p \frac{1+\gamma_3}{2}\mathcal{D}_i\Psi \tag{4.3}$$

bisogna aggiungere il termine disaccoppiato

$$I'_H = \frac{1}{2}\int d^2\sigma \bar{\Psi}\gamma^p \frac{1-\gamma_3}{2}\partial_p \Psi \tag{4.4}$$

che è banalmente invariante per tutte le simmetrie locali in base alla scelta secondo cui $\frac{1-\gamma_3}{2}\Psi$ è un singoletto sotto queste stesse trasformazioni. La dipendenza dei termini (4.3) e (4.4) dal determinante g è solo apparente poiché g può essere eliminato riscalando i campi dei fermioni eterotici Ψ. Utilizziamo ora questa libertà per scrivere l'azione dei fermioni eterotici come

$$I_H = \frac{1}{2}\int d^2\sigma \sqrt{\grave{g}}\grave{e}_p{}^i \bar{\Psi}\gamma^p \left(\partial_i - \frac{1+\gamma_3}{2}A_i\right)\Psi. \tag{4.5}$$

Abbiamo qui introdotto le zweibein accentate a sinistra $\grave{e}_+{}^i = \delta^i_+$, $\grave{e}_-{}^i = e_-{}^i$. In seguito useremo le zweibein accentate a destra $\acute{e}_+{}^i = e_+{}^i$, $\acute{e}_-{}^i = \delta_-{}^i$.

Estendiamo dimensionalmente questa azione. Le matrici γ^p risultano scomposte come in (2.90) e sono soggette alle leggi di commutazione (2.91) e (2.93),

$$\{\gamma^p, \gamma^q\} = 2\eta^{pq} \tag{4.6a}$$

$$\{\overline{\gamma}^p, \gamma^3\} = 0 \tag{4.6b}$$

$$\left[\hat{\gamma}^p, \gamma^3\right] = 0. \tag{4.6c}$$

Per calcolare l'anomalia di gauge ci mettiamo nella metrica piatta bidimensionale $\grave{g}^{ij} = \eta^{ij}$. Recupereremo la metrica $\grave{g}^{ij}$ alla fine del calcolo.

Applichiamo ora la (2.95) per calcolare il vertice anomalo relativo all'azione regolarizzata (4.5); in metrica piatta si ha

$$sI_H = \frac{1}{2}\int d^D\sigma\, \bar{\Psi}\mathcal{C}\hat{\gamma}^i\gamma^3\hat{\mathcal{D}}_i\Psi, \tag{4.7}$$

dove abbiamo indicato $\hat{\mathcal{D}}_i = \hat{\partial}_i - \frac{1+\gamma_3}{2}\hat{A}_i$. Poiché la connessione A_i è un campo esterno che vive strettamente in due dimensioni otteniamo per il vertice anomalo

$$\epsilon R = Q = \frac{1}{2}\int d^D\sigma\, \bar{\Psi}\mathcal{C}\hat{\gamma}^i\gamma^3\hat{\partial}_i\Psi. \tag{4.8}$$

Q contiene come campi esterni solo il ghost $\mathcal{C} = \mathcal{C}^I T^I$ che è attaccato ad una linea fermionica.

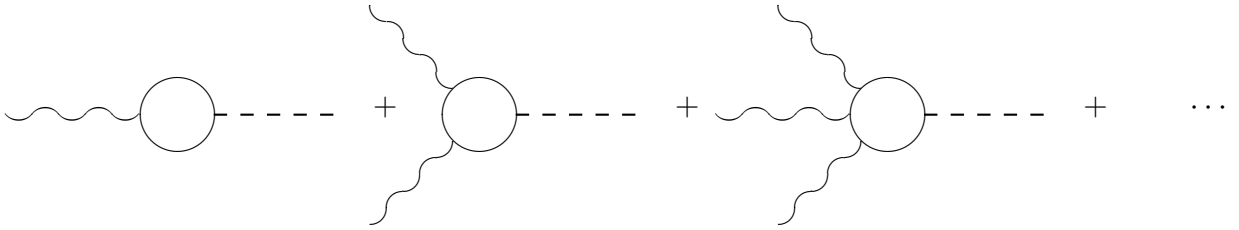


Figura 4.1: Grafici fermionici che contribuiscono all'anomalia ad un loop.

Le regole di Feynman sono quelle note:

$$\text{Propagatore di } \Psi \qquad \frac{i\alpha}{\not{k}}\delta^{rs} \tag{4.9a}$$

$$\text{Vertice di gauge } \Psi\text{-}\bar{\Psi}\text{-}A \qquad \frac{1}{\alpha}\gamma^i\frac{1+\gamma^3}{2}T^I. \tag{4.9b}$$

La regola di Feynman associata al vertice anomalo (4.8) è data da

$$\text{Vertice anomalo } \Psi\text{-}\Psi\text{-}\mathcal{C} \qquad \frac{i}{\alpha}\frac{\hat{\not{k}}-\hat{\not{k}}'}{2}\gamma^3 T^J \tag{4.9c}$$

dove J è l'indice di gauge portato dal ghost esterno e k e k' sono i momenti rispettivamente entranti ed uscenti dei fermioni eterotici. I grafici di Feynman ad un loop con l'inserzione di *un* vertice anomalo del tipo (4.9c) sono indicati in Fig. 4.1.

Calcoliamo l'anomalia prodotta dal primo grafico in tale figura: esso contiene un campo di gauge esterno A^I ed un ghost esterno $\mathcal{C}^J$ associato alla regola (4.9c), e nella loop circolano fermioni. I momenti esterni vivono strettamente in due dimensioni. L'anomalia è

$$\frac{i}{\alpha}A_j^{IJ}(p) = \frac{i}{2}\,\mathrm{tr}(T^I T^J)\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\,\mathrm{tr}\left(\hat{\not{k}}\gamma_3\frac{1}{\not{k}}\gamma_j\frac{1+\gamma_3}{2}\frac{1}{\not{k}-\not{p}}\right). \tag{4.10}$$

L'integrale su k è divergente ultravioletto (con divergenza logaritmica), d'altra parte $\hat{k}$ è di ordine ϵ cosicché ci si aspetta un risultato finito. Un calcolo preciso dà infatti, nel limite $\epsilon \to 0$,

$$A_j^{IJ} = \frac{\alpha}{8\pi}\,\mathrm{tr}(T^I T^J)(\eta_{mj} - \varepsilon_{mj})(ip^m). \tag{4.11}$$

Aggiungiamo ora le gambe esterne, A^I e $\mathcal{C}^J$, e torniamo allo spazio delle configurazioni, ottenendo l'anomalia di gauge

$$A'_G = -\frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\,\mathrm{tr}(\mathcal{C}\partial_+ A_-). \tag{4.12}$$

Se ora procediamo considerando i diagrammi con n gambe esterne in Fig. 4.1, notiamo che l'integrazione sul momento del fermione circolante si comporta per k grande come

$$\sim \int^{\Lambda} \frac{d^D k}{k^{n+1}} \hat{k} \sim \Lambda^{2-n}. \tag{4.13}$$

Per $n \geq 3$ l'integrale su k in (4.13) è sicuramente convergente e, grazie alla presenza di $\hat{k}$ nel numeratore, l'ampiezza si annulla per $\epsilon \to 0$. Non c'è dunque contributo all'anomalia da nessuno dei diagrammi in Fig. 4.1 con tre o più campi di gauge esterni. Rimane da considerare il diagramma con l'inserzione di *due* campi di gauge. In questo caso (4.13) dà luogo ad un integrale logaritmico divergente e per $\epsilon \to 0$ si possono annullare i momenti esterni. Il secondo diagramma in Fig. 4.1 dà luogo all'integrale

$$A_2 = \int \frac{d^D k}{(k^2)^3} J(k^3, \hat{k}). \tag{4.14}$$

La funzione $J(k^3, \hat{k})$ è riportata in appendice B. Tale funzione è costituita da una traccia su matrici γ che contengono tre potenze dei momenti in D dimensioni ed un $\hat{k}$ che vive in ϵ dimensioni. Un'analisi attenta di questa traccia rivela tuttavia che in effetti $A_2 = 0$ (la dimostrazione è in appendice B). Dunque anche questo diagramma si annulla e l'unico contributo all'anomalia proviene dal primo diagramma cosicché l'anomalia è quella calcolata in (4.12).

Reintroducendo la metrica accentata a sinistra si ha

$$A'_G = -\frac{\alpha}{8\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}}\, \mathrm{tr}(\mathcal{C} \grave{D}_+ A_-), \tag{4.15}$$

un'espressione che non è invariante sotto diffeomorfismi. Abbiamo qui definito le derivate covarianti per trasformazioni locali di Weyl e di Lorentz in $d = 2$, per una generica zweibein $e_\pm{}^i$,

$$D_\pm = \partial_\pm + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_j (\sqrt{g} e_\pm{}^j). \tag{4.16}$$

Possiamo costruire una forma diff-invariante dell'anomalia aggiungendo un termine locale all'azione effettiva (in regolarizzazione dimensionale l'azione effettiva è sempre definita modulo termini locali); ridefiniamo allora l'azione effettiva come segue:

$$\Gamma_H = \Gamma'_H - \frac{\alpha}{16\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}}\, \mathrm{tr}(\grave{A}_+ A_-) \tag{4.17}$$

per ottenere l'anomalia di gauge indipendente dalla metrica

$$A_G = \frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\varepsilon^{ij}\,\mathrm{tr}(\mathcal{C}\partial_i A_j). \tag{4.18}$$

Naturalmente questa anomalia può essere calcolata secondo la procedura tradizionale, integrando (4.5) sui fermioni eterotici e calcolando il contributo di tipo A-A all'azione effettiva (vedasi Fig. 4.2). Verifichiamo ora l'equivalenza delle due procedure. Con la metrica piatta, in regolarizzazione dimensionale

$$\begin{aligned}\Gamma'_H &= -\frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma(\eta^{ij}-\varepsilon^{ij})(\eta^{mn}-\varepsilon^{mn})\,\mathrm{tr}\left(\partial_i A_j\frac{1}{\Box}\partial_m A_n\right) \\ &= -\frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\,\mathrm{tr}\left(\partial_+ A_-\frac{1}{\Box}\partial_+ A_-\right).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Reintroducendo la metrica accentata a sinistra,

$$\Gamma'_H = -\frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\grave{g}}\,\mathrm{tr}\left(\grave{D}_+ A_-\frac{1}{\Box_{\grave{g}}}\grave{D}_+ A_-\right), \tag{4.20}$$

dove il simbolo $\Box_g$ per una generica metrica g_{ij} ha il significato di

$$\Box_g \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j) = D_+\partial_- = D_-\partial_+. \tag{4.21}$$

Nell'azione effettiva (4.20) è presente un'anomalia dei diffeomorfismi che è comunque banale e che può essere eliminata ridefinendo Γ'_H come in (4.17), per ottenere

$$\begin{aligned}\Gamma_H &= -\frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\grave{g}}\,\mathrm{tr}\left(\grave{D}_+ A_-\frac{1}{\Box_{\grave{g}}}(\grave{D}_+ A_- - D_-\grave{A}_+)\right) \\ &= -\frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,\mathrm{tr}\left(A_-\frac{1}{D_-}\frac{\varepsilon^{ij}\partial_i A_j}{\sqrt{g}}\right).\end{aligned} \tag{4.22}$$

La dipendenza dal determinante $\sqrt{g}$ è solo fittizia nella (4.22) ed è quindi ammissibile la sostituzione di $\sqrt{\grave{g}}$ con $\sqrt{g}$. La variazione di questa azione secondo la (4.1) dà come risultato

$$\begin{aligned}s_G\Gamma_H = \frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\varepsilon^{ij}\,\mathrm{tr}(\mathcal{C}\partial_i A_j) - \\ -\frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,\mathrm{tr}\left(D_+[\mathcal{C},A_-]\frac{1}{\Box_g}D_+ A_-\right).\end{aligned} \tag{4.23}$$

Il primo termine al secondo membro di questa equazione è locale e corrisponde all'anomalia (4.18), mentre il secondo termine è non locale e chiaramente spurio nel senso che è cancellato

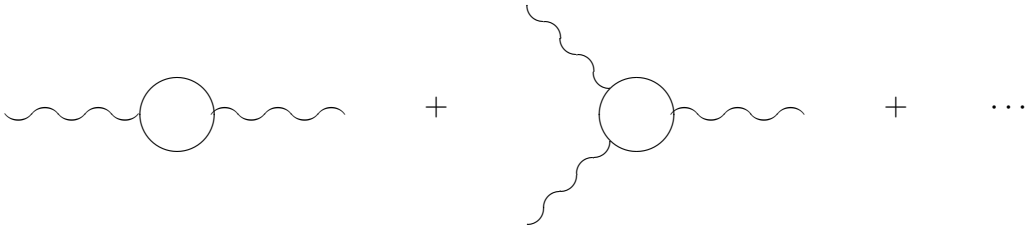


Figura 4.2: Grafici fermionici che contribuiscono all'azione effettiva ad un loop.

da un termine corrispondente nella variazione di Γ_3 relativo al secondo diagramma di Fig. 4.2 con tre campi di gauge esterni A_i. Ora, anche $s_G(\Gamma_H + \Gamma_3)$ contiene, oltre ad A_G, termini non locali che sono cancellati da $s_G\Gamma_4$: le cancellazioni proseguono in questo modo. Queste complicate cancellazioni correlate, dovute alla natura non abeliana dei campi di gauge di Yang-Mills, sono elegantemente evitate dal metodo del vertice anomalo, poiché in tal caso i diagrammi con due o più campi di gauge sulle gambe esterne semplicemente non contribuiscono. In realtà la tecnica del vertice anomalo fornisce una prova effettiva di queste cancellazioni correlate.

4.2 L'anomalia κ di Yang-Mills

Ritorniamo alla derivazione dell'anomalia κ nel settore di Yang-Mills che proviene dall'integrazione sui fermioni eterotici di (4.5). Le trasformazioni κ dei campi presenti nella (4.5) sono (anche qui usiamo la notazione a due componenti per gli spinori)

$$s_\kappa A_i = \mathcal{D}_i C + F_i \tag{4.24a}$$

$$s_\kappa \Psi = \frac{1+\gamma_3}{2}\left(C\Psi + w^\alpha y^b F_{b\alpha}\psi_0 + o(\chi^2)\right) \tag{4.24b}$$

$$s_\kappa \grave{e}_p{}^i = 0, \tag{4.24c}$$

dove, ricordiamo, $C = w^\alpha A_\alpha$, e $w^\alpha = (\not{V}_- k_0)^\alpha$. Come già osservato, la trasformazione κ nel settore di gauge agisce come una trasformazione locale di gauge di parametro C più una trasformazione intrinseca κ. Notiamo che $F_- = 0$, vedasi (1.85a), e che solo A_- è accoppiato ai fermioni eterotici in (4.5).

La trasformazione di gauge locale dà quindi origine ad un vertice anomalo κ che è dato dalla (4.8), dove $\mathcal{C}$ viene sostituito da C. La relativa anomalia κ può quindi essere calcolata

in completa analogia con l'anomalia di gauge (4.15), e si ottiene

$$A'_{\kappa G} = -\frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\hat{g}}\,\mathrm{tr}\left(C\grave{D}_+A_-\right). \tag{4.25}$$

Anche in questo caso l'anomalia non è diff-invariante, e possiamo aggiungere all'azione effettiva lo stesso cociclo di (4.17) per ottenere l'anomalia κ invariante sotto diffeomorfismi:

$$\begin{aligned} A_{\kappa G} &= \frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\varepsilon^{ij}\,\mathrm{tr}(C\partial_i A_j + F_i A_j) \\ &= -\frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\varepsilon^{ij}V_i{}^A V_j{}^B w^\gamma(\omega_{3YM})_{\gamma BA}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

La prima riga in (4.26) è una conseguenza della (1.85), mentre la seconda riga fa uso della definizione della forma di Chern-Simons di Yang-Mills ω_{3YM} data in (1.40). Non ci si aspetta che le trasformazioni κ intrinseche contribuiscano all'anomalia κ ad un loop poiché, come vedremo più avanti, la (4.26) già soddisfa la condizione di consistenza di Wess-Zumino.

Richiamando il risultato intermedio (1.76) si nota che l'anomalia $A_{\kappa G}$ può essere riassorbita [44] imponendo i vincoli (1.35), non sulla tre-forma definita a livello classico come $H = dB$, ma sulla tre-forma H definita invece da

$$H = dB + \frac{\alpha}{8\pi}\omega_{3YM}. \tag{4.27}$$

Questa relazione richiede di conseguenza che B trasformi in modo anomalo sotto le trasformazioni di gauge, ovvero come

$$\delta_G B = -\frac{\alpha}{8\pi}\,\mathrm{tr}(\mathcal{C}dA), \tag{4.28}$$

poiché $\delta_G\omega_{3YM} = d(\mathcal{C}dA)$. Quindi tenendo conto della (4.28), la trasformazione di gauge dell'azione (1.68) cancella l'anomalia di gauge (4.18), come è ben noto.

L'identità di Bianchi associata ad Eq. (4.27) è

$$dH = \frac{\alpha}{8\pi}\,\mathrm{tr}(FF); \tag{4.29}$$

tale identità può essere consistentemente risolta in superspazio [54] e dà luogo alla teoria di Chapline-Manton [55], ovvero la teoria SUGRA-SYM in dieci dimensioni con accoppiamento minimale tra il settore di gauge ed il settore gravitazionale. L'Eq. (4.29) coincide con il risultato di Ref. [17] tenendo conto che il nostro H differisce da quello usato in tale lavoro per un fattore due.

4.3 L'anomalia di Lorentz

In questa sezione vogliamo derivare l'anomalia di Lorentz del modello sigma con la stessa tecnica utilizzata per derivare l'anomalia di gauge. Ci aspettiamo che compaia un'anomalia di Lorentz per via dell'accoppiamento chirale dei campi fermionici y^α alla connessione indotta di Lorentz $\Omega_{i\alpha}{}^\beta \equiv \frac{1}{4}\Omega_{iab}(\Gamma^{ab})_\alpha{}^\beta$, $\Omega_{ia}{}^b \equiv V_i{}^C\Omega_{Ca}{}^b$, nel primo termine dell'azione sviluppata in coordinate normali (3.99), tramite la derivata covariante $D_j y^\beta \equiv \partial_j y^\beta - \Omega_j{}^\beta{}_\gamma y^\gamma$. L'azione relativa a tale termine,

$$I_F = \int d^2\sigma \sqrt{g} y^\alpha \not{V}_{-\alpha\beta} D_+ y^\beta, \tag{4.30}$$

è invariante sotto le trasformazioni di Lorentz combinate dei campi quantistici y^α e dei campi di background $\Omega_i{}^\beta{}_\alpha = -\Omega_{i\alpha}{}^\beta$,

$$\delta_L y^\alpha = \mathcal{L}^\alpha{}_\beta y^\beta \tag{4.31a}$$

$$\delta_L \Omega_i{}^\beta{}_\alpha = \partial_i \mathcal{L}^\beta{}_\alpha + \mathcal{L}^\beta{}_\gamma \Omega_i{}^\gamma{}_\alpha - \Omega_i{}^\beta{}_\gamma \mathcal{L}^\gamma{}_\alpha, \tag{4.31b}$$

dove $\mathcal{L}^\beta{}_\alpha = \frac{1}{4}(\Gamma_{ab})^\beta{}_\alpha \mathcal{L}^{ab}$. Poiché non è nota attualmente alcuna procedura consistente di quantizzazione $SO(10)$ Lorentz-covariante della teoria in esame, ci limimtiamo a derivare l'anomalia di Lorentz sotto trasformazioni locali di $SO(8)$, ovvero tali che

$$n_a \mathcal{L}^{ab} = 0. \tag{4.32}$$

Allo scopo di avere un termine cinetico canonico per gli scalari di worldsheet y^α, essi devono essere trasformati in spinori di Majorana-Weyl [43]. Ciò si può ottenere riscalando le y^α di una quantità $SO(8)$-invariante,

$$y^\alpha = \frac{1}{\sqrt{4n_-}} y_u^\alpha, \tag{4.33}$$

dove $n_- = V_-{}^a n_a$, ed introducendo lo spinore di Majorana

$$Y^\alpha = \begin{pmatrix} y_u^\alpha \\ y_d^\alpha \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

la cui componente "down" $\frac{1}{2}(1+\gamma^3)Y^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ y_d^\alpha \end{pmatrix}$ è disaccoppiata dalla teoria.

L'azione (4.30) viene riscritta quindi in termini degli spinori di Majorana come segue:

$$I_F = \frac{1}{4n_-}\sqrt{g}\bar{Y}^\alpha e_p{}^i \gamma^p \frac{1-\gamma_3}{2} \not{V}_{-\alpha\beta} D_i Y^\beta. \tag{4.35}$$

Per completare l'azione degli spinori di Majorana Y^α si deve aggiungere il termine cinetico disaccoppiato delle y_d^α. Analogamente al termine dei fermioni eterotici otteniamo

$$I_F = \frac{1}{2}\int d^2\sigma\sqrt{\acute{g}}\left(\frac{1}{2n_-}\bar{Y}^\alpha \acute{e}_p{}^i\gamma^p\frac{1-\gamma_3}{2}\not{V}_{-\alpha\beta}D_iY^\beta + \acute{e}_p{}^iY^\alpha\gamma^p\frac{1+\gamma_3}{2}\not{h}_{\alpha\beta}\partial_iY^\beta\right). \quad (4.36)$$

dove ora usiamo le zweibein accentate a destra, $\acute{e}_+{}^i = e_+{}^i$,

$\acute{e}_-{}^i = \delta_-^i$. I_F è invariante per trasformazioni locali di $SO(8)$, cioè (4.31b) e

$$\delta_L Y^\alpha = \frac{1-\gamma_3}{2}\mathcal{L}^\alpha{}_\beta Y^\beta. \quad (4.37)$$

Possiamo ora seguire la linea della precedente sezione per calcolare l'anomalia di Lorentz. Usiamo la regolarizzazione dimensionale per estendere I_F in D dimensioni precisamente come abbiamo fatto nella precedente sezione per i fermioni eterotici e calcoliamo il vertice anomalo associato all'azione (4.36) per una metrica piatta $\acute{g}^{ij} = \eta^{ij}$. Otteniamo

$$s_L I_F^\epsilon = -\frac{1}{2}\int d^D\sigma\bar{Y}^\alpha\mathcal{L}_\alpha{}^\beta\hat{\gamma}^i\gamma^3\left(\frac{V_-{}^a}{2n_-}(\Gamma_a)_{\beta\gamma}\frac{1-\gamma_3}{2}D_i + \not{h}_{\beta\gamma}\frac{1+\gamma_3}{2}\partial_i\right)Y^\gamma. \quad (4.38)$$

Per calcolare l'anomalia imponiamo ora il gauge fixing di cono-luce (3.87), che diviene

$$\frac{1-\gamma_3}{2}(\not{h}Y)_\alpha = 0. \quad (4.39)$$

A tal scopo inseriamo l'identità $\not{h}\not{h} + \not{h}\not{h} = 1$ in (4.36) e (4.38), ottenendo

$$\tilde{I}_F = \frac{1}{2}\int d^D\sigma\bar{Y}^\alpha\gamma^i\left(\partial_i\not{h}_{\alpha\beta} - \frac{1-\gamma_3}{2}\Omega_{i\alpha}{}^\gamma\not{h}_{\gamma\beta}\right)Y^\beta \quad (4.40)$$

$$\epsilon R = Q = -\frac{1}{2}\int d^D\sigma Y^\alpha\mathcal{L}_\alpha{}^\beta\hat{\gamma}^i\gamma^3\not{h}_{\beta\gamma}\hat{\partial}_iY^\gamma. \quad (4.41)$$

Abbiamo usato le relazioni $[\mathcal{L}, \not{h}] = 0 = [\Omega_i, \not{h}]$ ed il fatto che $\Omega_{i\beta}{}^\alpha$ vive strettamente in due dimensioni.

Ora possiamo usare l'analogia formale esistente tra (4.40), (4.41) e (4.5), (4.8) per calcolare l'anomalia. Dall'azione (4.40) ricaviamo le regole di Feynman

$$\text{Propagatore } Y^\alpha \qquad \frac{i\alpha}{\not{k}}\not{h} \quad (4.42a)$$

$$\text{Vertice } Y\text{-}Y\text{-}\Omega \qquad \frac{1}{\alpha}\gamma^i\frac{1-\gamma_3}{2}\frac{1}{4}(\Gamma_{ab}\not{h})_{\alpha\beta} \quad (4.42b)$$

mentre per il vertice anomalo dalla (4.41) ricaviamo la regola di Feynman

$$\text{Vertice anomalo } Y\text{-}Y\text{-}\mathcal{L} \qquad -\frac{i}{\alpha}\frac{\hat{\not{k}} - \hat{\not{k}}'}{2}\gamma^3\frac{1}{4}(\Gamma_{cd}\not{h})_{\alpha\beta}. \quad (4.42c)$$

Il calcolo dell'anomalia è ora del tutto simile a quanto visto nella precedente sezione, con l'unica differenza che le chiralità sono invertite. Il primo diagramma in Fig. 4.1 con l'inserzione del vertice anomalo (4.42c) e con una gamba esterna Ω_{jab} dà

$$\frac{i}{\alpha}A^{cd}_{jab}(p) = \frac{i}{32}\,\mathrm{tr}\left(\Gamma^{cd}\not{n}\not{n}\Gamma_{ab}\not{n}\not{n}\right)\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\,\mathrm{tr}\left(\hat{\not{k}}\gamma^3\frac{1}{\not{k}}\gamma_j\frac{1-\gamma_3}{2}\frac{1}{\not{k}-\not{p}}\right). \tag{4.43}$$

L'integrale in (4.43) è già stato calcolato nella sezione precedente (vedasi Eq. (4.10)) mentre la traccia delle matrici Γ, modulo termini che si annullano grazie alla (3.88), vale

$$\mathrm{tr}\left(\Gamma^{cd}\not{n}\not{n}\Gamma_{ab}\not{n}\not{n}\right) = -16\delta^c_{[a}\delta^d_{b]}. \tag{4.44}$$

Il risultato per $\epsilon \to 0$ è

$$A^{cd}_{jab} = -\frac{\alpha}{8\pi}\delta^c_{[a}\delta^d_{b]}(\eta_{mj}+\varepsilon_{mj})(ip^m). \tag{4.45}$$

Aggiungendo le gambe esterne $\mathcal{L}_{cd}$ e $\Omega_j{}^{ab}$ e reintroducendo la metrica accentata a destra, l'anomalia di Lorentz $SO(8)$ diviene

$$A'_L = -\frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\acute{g}}\,\mathrm{tr}\left(\mathcal{L}\acute{D}_-\Omega_+\right). \tag{4.46}$$

La traccia è calcolata nella rappresentazione fondamentale del gruppo di Lorentz, ad esempio $\mathrm{tr}(\mathcal{L}\Omega_j) \equiv \mathcal{L}_{ab}\Omega_j{}^{ba}$. La (4.46) è l'anomalia sotto trasformazioni $SO(8)$; postuliamo che l'anomalia per trasformazioni $SO(10)$, in un eventuale schema di quantizzazione covariante, sia ancora l'espressione (4.46), con i vincoli (3.88) e (4.32) non più necessari. Anche in questo caso i diagrammi con l'inserzione di un vertice anomalo e due o più campi esterni Ω_i sono nulli per $\epsilon \to 0$.

Pure nel caso dell'anomalia di Lorentz aggiungiamo un cociclo banale all'azione effettiva per ottenere l'anomalia diff-invariante come in (4.17),

$$\Gamma_F = \Gamma'_F - \frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\acute{g}}\,\mathrm{tr}\left(\acute{\Omega}_-\Omega_+\right), \tag{4.47}$$

cosicché

$$A_L = -\frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\varepsilon^{ij}\,\mathrm{tr}\left(\mathcal{L}\partial_i\Omega_j\right). \tag{4.48}$$

Il calcolo diretto dell'anomalia di Lorentz coinvolge il contributo del diagramma del tipo Ω-Ω all'azione effettiva che deriva dall'integrazione sui fermioni Y^α di (4.40). Il calcolo è

analogo allo stesso calcolo svolto per il settore di gauge, bisogna solo usare nuovamente (4.44) per ottenere il risultato parallelo a (4.20):

$$\Gamma'_F = -\frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\acute{g}}\,\mathrm{tr}\left(\acute{D}_-\Omega_+\frac{1}{\Box_{\acute{g}}}\acute{D}_-\Omega_+\right). \tag{4.49}$$

Aggiungendo il cociclo banale di (4.47) otteniamo l'azione effettiva diff-invariante come in (4.22),

$$\Gamma_F = \frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,\mathrm{tr}\left(\Omega_+\frac{1}{D_+}\frac{\varepsilon^{ij}\partial_i\Omega_j}{\sqrt{g}}\right) \tag{4.50}$$

La variazione di Lorentz di questa azione effettiva è

$$\begin{aligned} s_L\Gamma_F = &-\frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\varepsilon^{ij}\,\mathrm{tr}\,(\mathcal{L}\partial_i\Omega_j) - \\ &-\frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,\mathrm{tr}\left(D_-[\mathcal{L},\Omega_+]\frac{1}{\Box_g}D_-\Omega_+\right). \end{aligned} \tag{4.51}$$

Di nuovo, il primo termine a secondo membro di questa equazione è l'anomalia (4.48), mentre il secondo termine è non locale e viene cancellato dal diagramma con tre campi esterni Ω, vedi Fig. 4.1.

Un primo tentativo di derivare l'equazione (4.51) si trova in [24]. Discutiamo ora brevemente la possibilità di ulteriori anomalie di Lorentz. Tali anomalie possono originarsi da termini nell'azione sviluppata in coordinate normali (3.99) che contengono esplicitamente la connessione Ω_i. Nel termine $-\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ij}D_iy^aD_jy_a$ la connessione non è accoppiata a campi chirali, e dunque tale termine non può produrre un'anomalia di Lorentz. Il termine misto $-2\sqrt{g}D_-y^aV_+{}^\alpha(\Gamma_a)_{\alpha\beta}y^\beta$ non è $SO(8)$ invariante, dobbiamo imporre la condizione fisica $\not{n}_{\alpha\beta}V_j{}^\beta = 0$ sul campo esterno $V_j{}^\beta$. Inserendo quindi l'identità $\not{n}\not{n} + \not{n}\not{n} = 1$, tale termine diviene $-4\sqrt{g}\partial_-y^an_aV_+{}^\beta\not{n}_{\beta\alpha}y^\alpha$ dove la connessione è scomparsa in virtù della condizione (3.88). Il settimo termine in (3.99) contiene Ω_i esplicitamente ma non contribuisce all'anomalia di Lorentz per motivi che preciseremo nella prossima sezione.

I termini quadratici in y^α nella (3.99) danno luogo ad anomalie banali e perciò non costituiscono vere anomalie. Diamo dimostrazione di questa affermazione per il nono termine in (3.99), $\frac{1}{4}V_-^aV_+^by^\delta y^\gamma(\Gamma_{acd})_{\delta\gamma}T^{cd}{}_b$. Per mantenere l'invarianza sotto $SO(8)$ dobbiamo imporre su T_{abc} la condizione

$$n_aT^{abc} = 0. \tag{4.52}$$

Il termine in questione viene reso inoffensivo definendo semplicemente

$$\tilde{\Omega}_{ia}{}^{b} \equiv \Omega_{ia}{}^{b} - \frac{1}{2} e_{-i} V_{+}{}^{g} T_{ga}{}^{b}, \tag{4.53}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{+a}{}^{b} &= \Omega_{+a}{}^{b} - V_{+}{}^{g} T_{ga}{}^{b} \\ \tilde{\Omega}_{-a}{}^{b} &= \Omega_{-a}{}^{b}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Inserendo tali espressioni nella (4.46) l'anomalia diviene

$$\begin{aligned} \tilde{A}_L &= -\frac{\alpha}{8\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\acute{g}}\, \mathrm{tr} \left(\mathcal{L} \acute{D}_{-} \tilde{\Omega}_{+} \right) \\ &= A'_L - \frac{\alpha}{8\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\acute{g}}\, \acute{\partial}_{-} \mathcal{L}_{ab} V_{+}{}^{c} T_{c}{}^{ba} \\ &= A'_L + s_L \left(-\frac{\alpha}{8\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\acute{g}}\, \acute{\Omega}_{-ab} V_{+}{}^{c} T_{c}{}^{ba} \right) \end{aligned} \tag{4.55}$$

e dunque $\tilde{A}_L$ ed A_L rappresentano la stessa classe di coomologia.

L'anomalia di Lorentz è riassorbita se si impone alla due-superforma B la legge di trasformazione anomala di Lorentz

$$\delta_L B = \frac{\alpha}{8\pi} \mathrm{tr}(\mathcal{L} d\Omega) \tag{4.56}$$

che, assieme alla legge di trasformazione anomala di gauge (4.28), permette di definire la curvatura gauge- e Lorentz-invariante

$$H = dB + \frac{\alpha}{8\pi} (\omega_{3YM} - \omega_{3L}) \tag{4.57}$$

e la relativa identità di Bianchi in superspazio

$$dH = \frac{\alpha}{8\pi} \left(\mathrm{tr}\, F^2 - \mathrm{tr}\, R^2 \right). \tag{4.58}$$

Entrambe le tracce in (4.58) sono calcolate nella rappresentazione fondamentale dei gruppi relativi, $SO(32)$ ed $SO(10)$ rispettivamente, e questa è precisamente la relazione alla base del meccanismo di cancellazione delle anomalie di gauge e di Lorentz di Green-Schwarz nella teoria di Supergravità-Super-Yang-Mills $N = 1$, $D = 10$.

Nella prossima sezione mostreremo che le (4.57), (4.58) sono le relazioni da sole sufficienti e necessarie per cancellare anche l'anomalia κ di Lorentz nel modello sigma in esame.

4.4 L'anomalia κ di Lorentz

Nel settore di Yang-Mills le trasformazioni κ agiscono essenzialmente come trasformazioni di gauge locali, e perciò il calcolo dell'anomalia κ è strettamente correlato a quello dell'anomalia di gauge. L'azione delle trasformazioni κ nel settore gravitazionale è tuttavia la combinazione di una trasformazione locale di Lorentz ed una trasformazione κ "intrinseca" e perciò la relazione tra l'anomalia κ di Lorentz $A_{\kappa L}$ e l'anomalia di Lorentz A_L non è più ovvia. L'anomalia κ di gauge è calcolata semplicemente dalla variazione di (4.20), mentre l'anomalia κ di Lorentz non può essere ottenuta dalla sola variazione di (4.49).

Infatti, nella (4.49) le chiralità sono rovesciate rispetto alla (4.20): d'altra parte, le trasformazioni κ delle connessioni indotte di gauge e di Lorentz sono

$$\begin{aligned} s_\kappa A_i &= \mathcal{D}_i C + F_i \\ s_\kappa \Omega_{ia}{}^b &= D_i L_a{}^b + R_{ia}{}^b, \end{aligned}$$

ed in entrambi i casi (vedasi Eq. (1.85)) $F_- = 0$ e $R_{-a}{}^b = 0$, mentre F_+ ed $R_{+a}{}^b$ sono differenti da zero. La variazione di Γ_F produce quindi, diversamente dal caso di Yang-Mills, oltre ad un contributo locale, anche contributi non locali proporzionali ad R_+; Γ_F dipende non localmente da $e_+{}^j$ e la variazione κ di $e_+{}^j$ induce ulteriori termini non locali. I termini locali in $s_\kappa \Gamma_F$ non soddisfano tra l'altro la condizione di consistenza di Wess-Zumino, come si vedrà nella prossima sezione.

Per risolvere questo quesito, notiamo che, come si può vedere in (3.69), le trasformazioni κ mescolano i fermioni y^α con i bosoni y^a. L'anomalia κ di Lorentz è dovuta all'accoppiamento esplicito della connessione indotta di Lorentz Ω_i con i campi quantistici (y^a, y^α). Mentre i bosoni y^a non contribuiscono all'anomalia di Lorentz, come si è visto, ci si aspetta che essi contribuiscano all'anomalia κ di Lorentz a causa del loro esplicito accoppiamento ad Ω_i nel termine $-\frac{1}{2}\sqrt{g} g^{ij} D_i y^a D_j y_a$. Il loro accoppiamento è in realtà necessario per saturare il problema coomologico accoppiato

$$\begin{aligned} s_L A_L &= 0 \\ s_\kappa A_L + s_L A_{\kappa L} &= 0 \\ s_\kappa A_{\kappa L} &= 0. \end{aligned} \tag{4.59}$$

La situazione è analoga al caso dell'anomalia supersimmetrica A_S in una teoria chirale di Yang-Mills. In tal caso la presenza dell'anomalia chirale di Adler-Bardeen-Bell-Jackiw (AB-

BJ) A_G induce la presenza di un'anomalia supersimmetrica tramite il problema coomologico accoppiato

$$\begin{aligned} s_G A_G &= 0 \\ s_S A_G + s_G A_S &= 0 \\ s_S A_S &= 0, \end{aligned} \tag{4.60}$$

dove s_S è la variazione BRST associata alle trasformazioni supersimmetriche. Come è ben noto l'anomalia ABBJ A_G riceve contributi solo dai diagrammi ad un loop dove circolano quarks chirali, mentre all'anomalia supersimmetrica A_S contribuiscono anche le loop di squarks, i partner bosonici scalari dei quarks. Questi loop di squarks sono necessari per saturare il problema accoppiato (4.60).

Poiché campi scalari di massa nulla in due dimensioni, quali sono i bosoni y^a, sono sempre accompagnati da divergenze infrarosse, introduciamo come regolatore infrarosso una massa m, e consideriamo l'azione bosonica

$$I_B = -\frac{1}{2}\int d^2\sigma\sqrt{g}\left(g^{ij}D_i y^a D_j y_a - m^2 y^a y_a\right), \tag{4.61}$$

dove, ricordiamo, $D_i y^a = \partial_i y^a + y^b \Omega_{ib}{}^a$. Le regole di Feynman nella metrica piatta $g^{ij} = \eta^{ij}$ sono

$$\text{Propagatore } y^a \qquad -\frac{i\alpha}{k^2 - m^2}\eta_{ab} \tag{4.62a}$$

$$\text{Vertice } \Omega\text{-}y\text{-}y \qquad \frac{1}{\alpha}(k + k')i\delta^c_{[a}\delta^d_{b]} \tag{4.62b}$$

$$\text{Vertice } \Omega\text{-}\Omega\text{-}y\text{-}y \qquad -\frac{2i}{\alpha}\eta^{ij}\eta_{bd}\eta_{fa}\eta_{gc}. \tag{4.62c}$$

L'ultimo vertice è saturato dai campi esterni $\Omega_i{}^{ab}\Omega_j{}^{cd}$, ed f e g indicano le linee interne bosoniche.

Calcoliamo il contributo quadratico nelle Ω_i all'azione effettiva dovuto all'azione classica (4.61). Abbiamo un grafico di self-energia ed un tadpole (i primi due diagrammi di Fig. 4.3). Poiché ciascuno dei due diagrammi è separatamente divergente ultravioletto introduciamo pure in questo caso una regolarizzazione dimensionale passando in $D = 2+\epsilon$ dimensioni ed una scala μ al fine calcolarli. Sommando i due diagrammi per generici m ed ϵ otteniamo

$$\frac{1}{\alpha}\Gamma_{iab;j}{}^{cd}(p) = \delta^d_{[a}\delta^c_{b]}\left(\eta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2}\right)B(p^2) \tag{4.63}$$

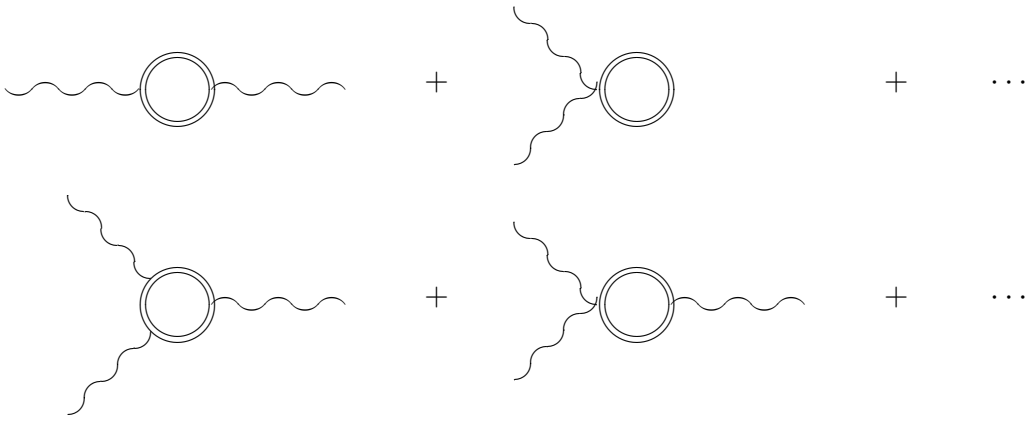


Figura 4.3: Grafici bosonici che contribuiscono all'azione effettiva ad un loop.

dove

$$B(p^2) = \frac{\Gamma(-\epsilon/2)}{(4\pi)^{D/2}} \left(\frac{m}{\mu}\right)^{\epsilon} \int_0^1 dx \left[\left(1 - x(1-x)\frac{p^2}{m^2}\right)^{\epsilon/2} - 1\right]. \tag{4.64}$$

Il risultato di Eq. (4.63) è trasverso come ci si aspettava per l'invarianza dell'azione (4.61) sotto trasformazioni Lorentz di target. Se ora fissiamo il regolatore infrarosso m e mandiamo $\epsilon \to 0$ la funzione B ammette un limite finito, il che significa che le divergenze ultraviolette presenti in entrambi i diagrammi di Fig. 4.3 si cancellano reciprocamente. Esplicitamente,

$$\begin{aligned} B\big|_{\epsilon=0} &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \ln\left(1 - x(1-x)\frac{p^2}{m^2}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 dx \ln\left(-\frac{m^2}{p^2} + x(1-x)\right) - \frac{1}{4\pi} \ln\left(-\frac{p^2}{m^2}\right). \end{aligned} \tag{4.65}$$

Questo risultato non ammette tuttavia un limite finito per $m \to 0$, indicando quindi la presenza di una divergenza infrarossa, come anticipato. Per $m \to 0$ la divergenza può essere direttamente ottenuta da (4.65),

$$\lim_{m\to 0} B\big|_{\epsilon=0} \to \frac{1}{4\pi}\left(2 - \ln\left(-\frac{p^2}{m^2}\right)\right). \tag{4.66}$$

Un'alternativa consiste nel fare prima il limite $m \to 0$ in (4.64) e quindi regolarizzare la divergenza infrarossa con la regolarizzazione dimensionale che è già presente perché utilizzata per le divergenze ultraviolette

$$B\big|_{m=0} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\right)^{\epsilon/2} \Gamma(-\epsilon/2) \int_0^1 dx (x(1-x))^{\epsilon/2}.$$

Nel limite $\epsilon \to 0$ la divergenza infrarossa si presenta come un polo semplice in ϵ,

$$\lim_{\epsilon\to 0} B\big|_{m=0} \to \frac{1}{4\pi}\left(2 - \ln\left(-\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\right) - \frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \tag{4.67}$$

(qui γ è la costante di Eulero).

Più avanti daremo un'argomentazione intuitiva del fatto che tali divergenze sono solo effetti perturbativi. Confrontando la (4.66) con la (4.67) possiamo isolare la divergenza infrarossa e determinare la parte finita di B, che è

$$B_f = \frac{1}{2\pi}. \tag{4.68}$$

Abbiamo omesso nella (4.68) il termine $\ln(-p^2)$ ed altri termini che interpretiamo come effetti infrarossi (saremo più precisi più avanti). Un criterio analogo per l'isolamento delle divergenze infrarosse è stato adottato in Ref. [29] per provare l'assenza di level shift nel modello di Wess-Zumino-Witten-Novikov (WZWN) a due loop. Nel nostro caso (4.68) è in effetti l'unica scelta che conduce ad un'anomalia che soddisfi la condizione di consistenza di Wess-Zumino, come vedremo nella prossima sezione. Con la scelta (4.68) il risultato (4.63) diviene

$$\Gamma_{iab;j}{}^{cd} = \frac{\alpha}{2\pi}\delta^d_{[a}\delta^c_{b]}\left(\eta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2}\right).$$

Aggiungendo le gambe esterne otteniamo il contributo bosonico all'azione effettiva

$$\Gamma_B = \frac{\alpha}{4\pi}\int d^2\sigma\,\mathrm{tr}\left(\Omega_i\left(\eta^{ij} - \frac{\partial^i\partial^j}{\Box}\right)\Omega_j\right)$$

e reintroducendo la metrica di worldsheet

$$\Gamma_B = \frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,\mathrm{tr}\left[(D_-\Omega_+ - D_+\Omega_-)\,\frac{1}{\Box_g}\,(D_-\Omega_+ - D_+\Omega_-)\right]. \tag{4.69}$$

Possiamo ora calcolare l'azione effettiva totale usando (4.50) e (4.69),

$$\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma_F + \Gamma_B \\ &= \frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,\mathrm{tr}\left(D_+\Omega_-\frac{1}{\Box_g}(D_+\Omega_- - D_-\Omega_+)\right) \\ &= \frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,\mathrm{tr}\left(\Omega_-\frac{1}{D_-}\frac{\varepsilon^{ij}\partial_i\Omega_j}{\sqrt{g}}\right)\end{aligned} \tag{4.70}$$

che, a mendalign di una differenza di segno dovuta all'opposta chiralità delle y^α rispetto ai fermioni eterotici Ψ, è formalmente identica all'azione effettiva che si ottiene dall'integrazione dei fermioni eterotici di Eq. (4.22). In particolare l'azione effettiva (4.70) non dipende da ${e_+}^i$, ma solo dai campi κ-invarianti ${e_-}^i$ e $\sqrt{g}$. Per calcolare la variazione κ BRST di (4.70) non è quindi necessario variare la metrica di worlsheet e ci possiamo limitare a variare la connessione indotta Ω_i. Per comprendere meglio il bilanciamento dei contributi non locali di questa variazione svolgiamo tale variazione separatamente su Γ_F e Γ_B

$$
\begin{aligned}
s_\kappa \Gamma_F &= -\frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma \varepsilon^{ij}\,\mathrm{tr}\,(L\partial_i\Omega_j - R_i\Omega_j) \\
&\quad - \frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\left[\mathrm{tr}\left(D_-\left[L,\Omega_+\right]\frac{1}{\Box_g}D_-\Omega_+\right) + \mathrm{tr}\left(D_-R_+\frac{1}{\Box_g}D_-\Omega_+\right)\right] \qquad (4.71a)\\
s_\kappa \Gamma_B &= -\frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\, 2\varepsilon^{ij}\,\mathrm{tr}\,(R_i\Omega_j) \\
&\quad + \frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\left[\mathrm{tr}\left(\left(D_-\left[L,\Omega_+\right] - D_+\left[L,\Omega_-\right]\right)\frac{1}{\Box_g}\left(D_-\Omega_+ - D_+\Omega_-\right)\right)\right. \\
&\quad \left. + \mathrm{tr}\left(D_-R_+\frac{1}{\Box_g}D_-\Omega_+\right)\right]. \qquad (4.71b)
\end{aligned}
$$

Analizziamo ora i termini non locali in (4.71a) e (4.71b).

1. I termini non locali proporzionali ad R_+ si cancellano tra (4.71a) e (4.71b).

2. Il termine proporzionale ad $[L,\Omega_+]$ in Eq. (4.71a) è cancellato dalla variazione κ del contributo Ω-Ω-Ω all'azione effettiva ottenuto dall'integrazione sulle y^α fermioniche. Ciò è assicurato dal fatto che questo termine è dovuto alle trasformazioni locali di Lorentz contenute nelle trasformazioni κ e, come si è visto in Sez. 4.3, Eq. (4.51), il contributo Ω-Ω-Ω non modifica l'anomalia di Lorentz. Ciò è completamente analogo al caso dei fermioni eterotici.

3. I contributi non locali di Eq. (4.71b) che sono proporzionali ad $[L,\Omega_\pm]$ sono cancellati dalla variazione κ di tipo Lorentz del contributo di Ω-Ω-Ω all'azione effettiva che deriva dall'integrazione sulle y^a bosoniche, il motivo essendo semplicemente che le y^a non contribuiscono all'anomalia di Lorentz.

Sommando i contributi rimanenti, che sono tutti locali, otteniamo l'anomalia κ

$$\begin{aligned} A_{\kappa L} &= -\frac{\alpha}{8\pi}\int d^2\sigma\varepsilon^{ij}\,\mathrm{tr}\,(L\partial_i\Omega_j + R_i\Omega_j) \\ &= \frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\varepsilon^{ij}V_i{}^A V_j{}^B w^\gamma(\omega_{3L})_{\gamma BA} \end{aligned} \tag{4.72}$$

dove abbiamo usato la definizione (1.42) della superforma di Lorentz Chern-Simons.

Il risultato può essere naturalmente ottenuto direttamente dalla variazione κ dell'azione effettiva totale (4.70), tenendo solo i termini locali. L'anomalia (4.72) può essere eliminata allo stesso modo dell'anomalia κ di Yang-Mills di Sez. 4.1. L'anomalia (4.72) è cancellata modificando ulteriormente l'Eq. (4.27) definendo la nuova tre-superforma H

$$H = dB + \frac{\alpha}{8\pi}\left(\omega_{3YM} - \omega_{3L}\right) \tag{4.73}$$

ed imponendo su H definita in (4.73) sempre i vincoli

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta\gamma} &= H_{ab\alpha} = 0 \\ H_{a\alpha\beta} &= 2(\Gamma_a)_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Notiamo che la definizione (4.73) coincide con la definizione (4.57), cioè precisamente la relazione che assicura anche la cancellazione delle anomalie di gauge e di Lorentz.

Discuteremo nella prossima sezione di possibili "vere" anomalie κ ad un loop. L'azione effettiva ad un loop può invece produrre anomalie κ banali che devono essere eliminate da opportune sottrazioni locali all'azione classica (1.68). Mostreremo questo fenomendalign nel seguente esempio.

Contributi aggiuntivi all'azione effettiva possono essere calcolati osservando che il settimo e nono termine nella (3.99) corrispondono formalmente allo shift della connessione $\Omega_{ia}{}^b$ nel senso che essi possono essere assorbiti dal primo e secondo termine rispettivamente definendo formalmente una nuova connessione di Lorentz,

$$\tilde{\Omega}_{ia}{}^b \equiv \Omega_{ia}{}^b - \frac{1}{2}e_{-i}V_+{}^g T_{ga}{}^b. \tag{4.75}$$

I contributi dovuti al settimo ed al nono termine in (3.99) all'azione effettiva sono quindi inclusi sostituendo nell'azione effettiva fermionica (4.49) ed in quella bosonica (4.69) Ω_i con $\tilde{\Omega}_i$ per ottenere rispettivamente $\tilde{\Gamma}'_F$ e $\tilde{\Gamma}_B$. Sommando otteniamo

$$\tilde{\Gamma}'_F + \tilde{\Gamma}_B = \Gamma + \frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\acute{g}}\left[\left(\Omega_{+a}{}^b - 2V_+{}^g T_{ga}{}^b\right)\acute{\Omega}_{-b}{}^a + \frac{1}{2}\delta^i_- e_{-i}V_+{}^g T_{ga}{}^b V_+{}^h T_{hb}{}^a\right], \tag{4.76}$$

in cui gli ultimi tre termini in questa formula non sono κ-invarianti ma sono comunque locali. Il contributo del settimo e nono termine in (3.99) dà quindi origine ad un'anomalia κ banale, che è eliminata ridefinendo l'azione classica,

$$I \to I - \frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\acute{g}}\left[\left(\Omega_{+a}{}^{b} - 2V_{+}{}^{g}T_{ga}{}^{b}\right)\acute{\Omega}_{-b}{}^{a} + \frac{1}{2}\delta^{i}_{-}e_{-i}V_{+}{}^{g}T_{ga}{}^{b}V_{+}{}^{h}T_{hb}{}^{a}\right]. \qquad (4.77)$$

Notiamo che i primi due cocicli in (4.77) sono precisamente quelli che sono stati sottratti nella sezione precedente per ottenere un'*anomalia* di Lorentz diff-invariante (vedi Eq. (4.47) ed Eq. (4.55)); l'ultimo cociclo in (4.77) è Lorentz-invariante ed è necessario per cancellare un'anomalia dei diffeomorfismi dall'*azione effettiva*.

Discutiamo ora brevemente le divergenze infrarosse in cui ci siamo imbattuti precedentemente. Tali divergenze sono dovute alla presenza di bosoni scalari a massa nulla, gli y^a, che come noto danno origine in due dimensioni a divergenze infrarosse. Con il seguente argomento diamo il suggerimento che in questo caso tali divergenze sono essenzialmente dovute ad effetti perturbativi. I campi bosonici y^a sono infatti nel nostro caso intrinsecamente massivi, poiché ci sono termini nell'azione (3.99) che sono quadratici in y^a,

$$\frac{1}{2}\int d^2\sigma\sqrt{g}\, y^a\mathcal{M}^2_{ab}(\sigma)y^b, \qquad (4.78)$$

dove $\mathcal{M}_{ab}$ è una funzione dei campi di background. Assumiamo che esista una configurazione dei campi di background in cui $\mathcal{M}^2_{ab}(\sigma)$ sia una matrice costante, cioè indipendente da σ, e supponiamo per semplicità che tale matrice sia proporzionale all'identità,

$$\mathcal{M}^2_{ab}(\sigma) = \mathcal{M}^2\delta_{ab}. \qquad (4.79)$$

Per una tale configurazione (4.78) produce quindi un termine di massa per gli scalari, con massa $\mathcal{M}$. In tal caso non è necessaria alcuna regolarizzazione infrarossa e la (4.64) diviene

$$\begin{aligned} B\big|_{\epsilon=0} &= -\frac{1}{4\pi}\int_0^1 dx \ln\left(-\frac{\mathcal{M}^2}{p^2} + x(1-x)\right) - \frac{1}{4\pi}\ln\left(-\frac{p^2}{\mathcal{M}^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{4\pi}\int_0^1 dx \ln\left(\frac{1}{x(1-x)} - \frac{p^2}{\mathcal{M}^2}\right). \end{aligned} \qquad (4.80)$$

L'integrale in (4.80) è ora convergente ma è *non analitico* nei "campi di background" $\mathcal{M}$. La tecnica perturbativa che abbiamo utilizzato per calcolare l'anomalia κ di Lorentz si basa su un'espansione in serie di polinomiali nei campi esterni, ma è evidente che l'espressione

(4.80) non può essere sviluppata attorno ad $\mathcal{M} = 0$ in polinomiali di $\mathcal{M}$. Nell'ipotesi (che riteniamo plausibile) che un tale ragionamento sia generalizzabile per una configurazione generica di campi esterni, le divergenze infrarosse che abbiamo incontrato sono effetti della non analiticità nei campi di background di una parte dell'azione effettiva. L'invarianza κ di un tale contributo non analitico è difficile da controllare; poiché le anomalie devono essere funzionali locali, e quindi analitici, pare comunque lecito assumere che esso sia κ-invariante.

Come ultimo commento di questa sezione sottolineiamo che la scelta di estrarre da (4.80) la costante $1/2\pi$ come contributo "analitico" è in effetti corretta poiché l'anomalia calcolata con questa costante, e solo con questa costante, risulta a) locale e b) tale da soddisfare la condizione di Wess-Zumino. Per una costante diversa i termini non locali proporzionali ad R_+ non si cancellerebbero tra la (4.71a) e la (4.71b).

4.5 Conclusioni

Come anticipato, il calcolo delle anomali κ permette, imponendo la loro cancellazione, di derivare le correzioni di ordine α ai vincoli classici dei suporcampi della teoria di background. Come è stato dimostrato in [11] (vedasi Sez. 3.2), la condizione di consistenza di Wess-Zumino cui devono sottostare le anomalie κ assicura la risolvibilità delle identità di Bianchi con questi nuovi vincoli.

Verifichiamo esplicitamente che l'anomalia calcolata in questo capitolo soddisfa alla condizione di consistenza di Wess-Zumino. Dalla discussione di Sez. 3.2 ci aspettiamo che tale anomalia sia del tipo "H", Eq. (3.38b),

$$A^H_\kappa = -\frac{\alpha'}{2}\int d^2\sigma\varepsilon^{ij}V_i{}^A V_j{}^B w^\gamma \bar{H}_{\gamma BA}; \tag{4.81}$$

la condizione di consistenza per A^H_κ,

$$s_\kappa A^H_\kappa = -\frac{\alpha'}{2}\int d^2\sigma\varepsilon^{ij}V_i{}^A V_j{}^B w^\gamma w^\delta (d\bar{H})_{\delta\gamma BA} = 0 \tag{4.82}$$

comporta di conseguenza le condizioni (3.44a) su $d\bar{H}$. L'anomalia κ totale calcolata in questo capitolo è effettivamente della forma (4.81), dove

$$\bar{H} \equiv \bar{H}^{\mathrm{CS}} = \frac{1}{4}(\omega_{3YM} - \omega_{3L}), \tag{4.83}$$

è una tre-superforma del tipo Chern-Simons, il cui differenziale

$$d\bar{H}^{\mathrm{CS}} = \frac{1}{4}\left(\mathrm{tr}\, F^2 - \mathrm{tr}\, R^2\right) \tag{4.84}$$

soddisfa effettivamente le (3.44a) in conseguenza dei vincoli $F_{\alpha\beta} = 0$ ed $R_{\alpha\beta} = 0$. Dunque l'anomalia

$$A_\kappa^{\mathrm{CS}} = -\frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\varepsilon^{ij}V_i{}^A V_j{}^B w^\gamma(\omega_{3YM} - \omega_{3L}) \tag{4.85}$$

costruita con $\bar{H}^{\mathrm{CS}}$ è consistente all'ordine α. La verifica esplicita di questa affermazione è immediata. Si ha infatti

$$s_\kappa A_\kappa^{\mathrm{CS}} = -\frac{\alpha}{32\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}V_-{}^a V_+{}^b w^\gamma w^\delta \left(\mathrm{tr}\, F^2 - \mathrm{tr}\, R^2\right)_{\delta\gamma ba}, \tag{4.86}$$

ed usando anche le relazioni (1.52d), (1.52e),

$$s_\kappa A_\kappa^{\mathrm{CS}} = -\frac{\alpha}{32\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}(\not{V}_- w)^\alpha(\not{V}_+ w)^\beta \left(\mathrm{tr}(\chi^\alpha\chi^\beta) - \mathrm{tr}(T^\alpha T^\beta)\right) \tag{4.87}$$

(dove intendiamo $\mathrm{tr}(T^\alpha T^\beta) = T_{ab}{}^\alpha T^{ab\beta}$). Tale espressione è nulla on-shell grazie all'identità (1.78).

Dalla discussione di Sez. 3.2 sappiamo inoltre che la condizione di consistenza dell'anomalia A_κ per un generico $\bar{H}$ implica che le identità di Bianchi possono essere consistentemente risolte imponendo ad $H = dB + \alpha'\bar{H}$ così definito gli stessi vincoli (1.35) imposti ad H classico, e lasciando invariati gli altri vincoli (1.51). La teoria effettiva di background relativa al modello sigma di Green-Schwarz in cui le anomalie κ di gauge e di Lorentz non sono presenti è dunque caratterizzata dalla relazione

$$H = dB + \alpha' d\bar{H}^{\mathrm{CS}} = dB + \frac{\alpha}{8\pi}(\omega_{3YM} - \omega_{3L}) \tag{4.88}$$

e quindi dall'identità di Bianchi

$$dH = \frac{\alpha}{8\pi}(\mathrm{tr}\, F^2 - \mathrm{tr}\, R^2). \tag{4.89}$$

Tale identità è risolta facendo uso delle tecniche standard di superspazio: le correzioni ai supercampi sono quelle indicate in Sez. 1.2, Eq. 1.67.

La differenza principale rispetto ai vincoli di ordine zero è che ora le componenti della curvatura $R_{\alpha\beta ab}$ non sono più nulle, ma contengono una irrep 120 di $SO(10)$, come ci si aspetta per teorie di supergravità non minimali [37, 30, 32]. Le grandezze $(\mathrm{tr}\, R^2)_{\alpha\beta\gamma\delta}$ e $(\mathrm{tr}\, R^2)_{\alpha\beta\gamma a}$ pure non sono più nulle, ma di ordine α e quindi la condizione di Wess-Zumino (4.82) è ora valida solo al primo ordine in α.

4.5.1 Possibili anomalie addizionali

E' possibile che siano presenti altre anomalie non banali ad un loop, ovvero di ordine α. Ricordiamo che l'anomalia κ totale A_κ e le anomalie di gauge e di Lorentz A_G ed A_L sono soluzioni (on-shell) del problema coomologico accoppiato

$$s_\kappa A_\kappa = 0, \qquad s_L A_G + s_G A_L = 0 \tag{4.90a}$$

$$s_G A_G = 0, \qquad s_L A_\kappa + s_\kappa A_L = 0 \tag{4.90b}$$

$$s_L A_L = 0, \qquad s_G A_\kappa + s_\kappa A_G = 0 \tag{4.90c}$$

dove s_κ, s_G, s_L sono gli operatori BRST associati alle trasformazioni κ, di gauge e di Lorentz rispettivamente. Se come anomalia A_κ prendiamo l'anomalia A_κ^{CS} (4.85) che abbiamo calcolato e per A_G ed A_L (4.18) e (4.48) rispettivamente, non è difficile verificare che tutte le equazioni in (4.90) sono in effetti soddisfatte (naturalmente la prima equazione in (4.90a) non è altro che la (4.82)).

Le anomalie di gauge e di Lorentz (4.18) e (4.48) sono evidentemente complete ad un loop e ci si aspetta che siano esatte, ovvero che non vi siano ulteriori contributi a più loop. Non è scontato tuttavia che l'espressione in (4.81) rappresenti l'anomalia κ completa ad un loop. In generale possiamo scrivere

$$A_\kappa = A_\kappa^{\mathrm{CS}} + X_\kappa \tag{4.91}$$

dove X_κ è una possibile anomalia aggiuntiva. L'anomalia (4.91) risolve ancora il problema accoppiato (4.90) e, poiché A_κ già ne è soluzione, otteniamo le condizioni su X_κ:

$$\begin{aligned} s_\kappa X_\kappa &= 0 \\ s_G X_\kappa &= 0 \\ s_L X_\kappa &= 0 \end{aligned} \tag{4.92}$$

e dunque l'anomalia aggiuntiva X_κ deve essere gauge e Lorentz invariante e deve soddisfare alla condizione di consistenza κ indipendentemente da A_κ^{CS}. La soluzione generale della (4.92) è

$$X_\kappa = \frac{\alpha}{16\pi} \int d^2\sigma \varepsilon^{ij} V_i{}^A V_j{}^B w^\gamma X_{\gamma BA}, \tag{4.93}$$

dove $X_{\gamma BA}$ sono le componenti della superforma

$$X = \frac{1}{3!} E^A E^B E^C X_{CBA}$$

che deve essere *gauge e Lorentz invariante*. La condizione di consistenza κ su X_κ è

$$\int d^2\sigma \varepsilon^{ij} V_i{}^A V_j{}^B w^\gamma w^\delta (dX)_{\delta\gamma BA} = 0, \tag{4.94}$$

che è equivalente a

$$(dX)_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \tag{4.95a}$$

$$(dX)_{\alpha\beta\gamma a} = 0 \tag{4.95b}$$

$$w^\beta V_-{}^a (dX)_{\alpha\beta ab} V_+{}^b w^\alpha = 0. \tag{4.95c}$$

Se le prime due equazioni sono soddisfatte la terza equazione è equivalente alla condizione

$$(dX)_{\alpha\beta ab} = (\Gamma_{[a}){}_{\alpha\varphi} H^{\varphi\delta} (\Gamma_{b]})_{\delta\beta} \tag{4.95d}$$

per un supercampo antisimmetrico $H^{\varphi\delta}$ che appartiene alla rappresentazione 120 di $SO(10)$. Una classe di soluzioni delle condizioni (4.95) è costruita come segue. Consideriamo un supercampo gauge-invariante Y^{abcd} antisimmetrico nei suoi indici e che quindi appartiene alla irrep 210 di $SO(10)$, e tale che la rappresentazione irriducibile più alta contenuta nella combinazione $D_\alpha Y_{abcd} + 2\lambda_\alpha Y_{abcd}$, la 1440, non sia presente,

$$(D_\alpha Y_{abcd} + 2\lambda_\alpha Y_{abcd})^{1440} = 0. \tag{4.96}$$

Possiamo allora costruire una tre-superforma X che soddisfa alla condizione (4.94):

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta\gamma} &= 0 \\ X_{a\alpha\beta} &= (\Gamma_{abcde})_{\alpha\beta} Y^{bcde}. \end{aligned} \tag{4.97}$$

Le condizioni (4.95) individuano in questo caso consistentemente e senza arbitrarietà $X_{ab\alpha}$ e X_{abc}.

Dunque data una irrep 210 gauge-invariante che soddisfa (4.96) individua un cociclo dell'operatore BRST s_κ e dunque una possibile anomalia. Se $X \neq d\tilde{B}$, allora ad X corrisponde un cociclo non banale e dunque un'anomalia (altrimenti può essere eliminato ridefinendo la due-forma B). In tal caso l'anomalia (4.93) può ancora essere eliminata imponendo su H, sempre definito dalla relazione (4.73), i vincoli modificati

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta\gamma} &= 0 \\ H_{a\alpha\beta} &= 2\Gamma_{a\alpha\beta} + \frac{\alpha}{8\pi} X_{a\alpha\beta} \\ H_{ab\alpha} &= \frac{\alpha}{8\pi} X_{ab\alpha}. \end{aligned} \tag{4.98}$$

La relazione tra H_{abc} e T_{abc} diviene ora

$$H_{abc} = T_{abc} + \frac{\alpha}{8\pi} X_{abc} \tag{4.99}$$

invece della (1.36). La condizione (4.94) garantisce ancora che le identità di Bianchi possano essere consistentemente risolte.

I risultati di Ref. [30] sembrerebbero suggerire che dovrebbe essere presente ad un loop, nel modello sigma in esame, un contributo di ordine α all'anomalia dovuto alla presenza della superforma X legata alla decomposizione di $\mathrm{tr}\, R^2$. In Ref. [30] l'identità di Bianchi

$$dH = \frac{\alpha}{8\pi} \left(\mathrm{tr}\, F^2 - \mathrm{tr}\, R^2 \right) \tag{4.100}$$

è risolta all'ordine α^2 (più precisamente in tale lavoro è fornita una soluzione completa a tutti gli ordini di questa identità di Bianchi, trovata precedentemente in Ref. [38], con un insieme di vincoli sui supercampi differente ma equivalente). La soluzione a tutti gli ordini è ottenuta modificando i vincoli su H proprio secondo la (4.98), dove $X_{a\alpha\beta}$ e $X_{ab\alpha}$ sono del *primo* ordine in α. In particolare in Ref. [30] è stato calcolato il supercampo composto Y_{abcd} di (4.97) al primo ordine in α, ottenendo

$$Y_{abcd} = c\alpha \left(R_{[abcd]} + T_{[ab}{}^{\alpha} (\Gamma_{cd]})_{\alpha}{}^{\beta} \lambda_{\beta} \right), \tag{4.101}$$

dove c è una costante. E' facilmente verificabile che tale supercampo soddisfa effettivamente (4.96) ordine α e dunque la tre-superforma X costruita in (4.101) definisce ciò che potremmo chiamare "un cociclo di s_κ al primo ordine in α". A questo punto si potrebbe concludere che nel modello sigma in esame dovrebbe effettivamente essere presente un contributo, visibile all'ordine α, e dunque ad un loop, dell'anomalia di tipo Chern-Simons, derivata dal supercampo (4.101).

Tale contributo all'anomalia, definito univocamente dalle relazioni (4.101), (4.97) e (4.95), può essere tuttavia eliminato *al primo ordine in* α con la sottrazione di un opportuno cociclo dall'azione effettiva. Di conseguenza si può dimostrare che la soluzione dell'identità di Bianchi per H di Ref. [30] è equivalente, al primo ordine in α, alla soluzione (1.67) nel caso più semplice in cui $S^{\alpha\beta} = \mathrm{tr}(\chi^\alpha \chi^\beta) - \mathrm{tr}(T^\alpha T^\beta)$ ed $H_{abc} = T_{abc}$, modulo ridefinizioni di ordine α dei campi della teoria di background SUGRA-SYM. Accenniamo solamente alla dimostrazione a sostegno di queste affermazioni [34].

La tre-superforma X discussa in questa sezione è la tre-superforma in cui è decomposta $\mathrm{tr}\, R^2$

$$\mathrm{tr}\, R^2 = dX + K \tag{4.102}$$

secondo il teorema di Ref. [36]. L'osservazione chiave è che X stessa può essere decomposta secondo lo schema seguente:

$$X = d\tilde{B} + X_0 + \alpha\hat{X}, \tag{4.103}$$

dove X_0 è tale che

$$\begin{aligned} X_{0\alpha\beta\gamma} &= 0 \\ X_{0\alpha\beta a} &= (\Gamma_a)_{\alpha\beta} x_0 \\ X_{0\alpha ab} &= (\Gamma_{ab})_\alpha{}^\beta D_\beta x_0, \end{aligned} \tag{4.104}$$

ed x_0 è uno scalare proporzionale ad $R_{abcd}R^{abcd}$. Il differenziale $K_0 = dX_0$ è di conseguenza dotato delle proprietà di K (gauge- e Lorentz-invariante, nullo nei settori con 3 o più indici spinoriali) a tutti gli ordini in α e dunque possiamo ridefinire $K' = K + K_0$. L'identità (4.102) diviene allora

$$\mathrm{tr}\, R^2 = \alpha d\hat{X} + K', \tag{4.105}$$

e questo assicura che l'identità di Bianchi per H

$$dH = \frac{\alpha}{8\pi}(\mathrm{tr}\, F^2 - \mathrm{tr}\, R^2) \tag{4.106}$$

si può sempre scrivere come

$$d\left(H + \frac{\alpha}{8\pi}\hat{X}\right) = \frac{\alpha}{8\pi}(\mathrm{tr}\, F^2 - K'). \tag{4.107}$$

Il secondo membro della (4.107) ha ora la struttura voluta (quella di K) e nel primo membro di (4.107) è evidente che non vi sono correzioni al primo ordine α ad H. Non ci aspettiamo quindi ad un loop nel modello sigma di Green-Schwarz anomalie X_κ non banali che soddisfano alle condizioni (4.92). Di conseguenza le correzioni complete di ordine α alla teoria pura SUGRA-SYM di background sono quelle indicate in (1.67), dove però $S^{\alpha\beta} = \mathrm{tr}(\chi^\alpha\chi^\beta) - \mathrm{tr}(T^\alpha T^\beta)$, ed $H_{abc} = T_{abc}$. In esse è di conseguenza ancora presente una simmetria completa tra il settore di gauge e quello gravitazionale. Le equazioni del moto possono essere ricavate da queste relazioni senza particolari difficoltà con le procedure standard di superspazio [38].

Naturalmente contributi all'anomalia di Chern-Simons in cui X_κ soddisfa (4.92) devono necessariamente comparire a due loop di modello sigma e dunque all'ordine α^2, poiché le identità di Bianchi sono soddisfatte solo all'ordine α.

In questo capitolo abbiamo stabilito fermamente la presenza della tre-superforma di Chern-Simons di Lorentz nel modello sigma eterotico di Green-Schwarz in un background SUGRA-SYM. Tale superforma è necessaria nella definizione della curvatura H associata alla due-forma di superpotenziale B per cancellare l'anomalia κ di Lorentz del modello sigma ed anche per cancellare l'anomalia ad un loop di Lorentz. L'assenza di anomalie κ è un requisito di consistenza poiché l'invarianza κ è necessaria per disaccoppiare gli 8 gradi di libertà non fisici dei 16 presenti nelle variabili θ^μ. Per garantire tale disaccoppiamento anche a livello quantistico è necessario che non siano presenti anomalie κ.

Le relazioni (4.57) e (4.58), che garantiscono l'assenza di anomalie di gauge, di Lorentz e κ ad un loop, si traducono nel superspazio dieci-dimensionale di background nelle relazioni che assicurano l'assenza di anomalie di gauge e di Lorentz nella teoria SUGRA-SYM $N = 1$, $D = 10$ secondo il meccanismo di Ref. [40].

I risultati di Ref. [12] ci assicurano inoltre che l'identità di Bianchi (4.58) è risolta consistentemente con i vincoli (4.74), e dunque si ottengono di conseguenza le equazioni del moto in superspazio che definiscono una teoria supersimmetrica.

Come si è osservato nella sezione precedente, ci si aspetta che ad un loop non compaiano altre anomalie non banali, ma a due loop devono comparire anomalie del tipo X_κ. Il calcolo di tali anomalie a due loop rende necessarie una serie di modifiche al procedimento adottato ad un loop.

1. L'azione va sviluppata in coordinate normali fino al quarto ordine in y^A. L'anomalia di ordine α^2 riceve contributi *ad un loop* dai termini quadratici in y^A quando si inseriscono i vincoli ordine α: in particolare la tre-superforma di curvatura di ordine zero in α, $H = dB$ che compare nell'azione sviluppata al primo ordine in y^A deve essere sostituita con la tre-superforma di ordine α, $H = dB + \frac{\alpha}{8\pi}(\omega_{3YM} - \omega_{3L})$. L'anomalia di ordine α^2 riceve contributi *a due loop* dai termini cubici e quartici in y^A in cui si inseriscono i vecchi vincoli classici di supergravità pura.

2. L'espansione in coordinate normali di Sez. 3.3 contiene una rotazione chirale di gauge dei fermioni eterotici di parametro Λ (3.58b) ed una rotazione chirale di Lorentz (implicita) per i fermioni y^α di parametro Σ (3.58c). La misura fermionica dell'integrale funzionale, come spiegato in Ref. [17], non è invariante sotto queste rotazioni, e dunque è necessario considerare le corrispondenti azioni di Wess-Zumino quando si fanno calcoli a due loop.

3. I cocicli κ ad un loop devono essere sottratti *tutti* dall'azione classica (1.68) e sviluppati in coordinate normali fino al secondo ordine in y^A. I cocicli banali che abbiamo trovato implicano la sottrazione

$$\Delta I = -\frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma \left(\sqrt{\hat{g}}\,\mathrm{tr}(A_-\grave{A}_+) + \sqrt{\acute{g}}\,\mathrm{tr}(\acute{\Omega}_-\Omega_+)\right) - \\ - \frac{\alpha}{16\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\acute{g}}V_+{}^g T_{ga}{}^b\left(-2\acute{\Omega}_{-b}{}^a + \frac{1}{2}\delta^i_- e_{-i}V_+{}^h T_{hb}{}^a\right). \qquad (4.108)$$

   Tale sottrazione non è necessariamente la sottrazione completa ad un loop, poiché non è stata fatta un'analisi completa ad un loop dell'azione effettiva.

4. In linea di principio si dovrebbero effettuare sottrazioni che coinvolgono anche i campi quantistici come campi esterni, allo scopo di assicurare la validità dell'identità di Slavnov-Taylor. Tali sottrazioni sono tuttavia innaturali nell'ambito del metodo dei campi di background e potrebbero ridurre la convenienza globale del metodo stesso.

Un calcolo a di ordine α^2 potrebbe poi richiedere l'integrazione sui ghosts κ e sui ghosts c^i, $u_+{}^+$ e $u_-{}^-$ del settore conforme. In tal caso il gauge-fixing di Sez. 3.3.1 e la relativa eliminazione di tutto il settore quantistico κ di Sez. 3.3.2 non sarebbe più corretto. Non potrebbe poi essere sufficiente l'imposizione dei vincoli $SO(8)$-covarianti sui campi di background. Potrebbe in definitiva manifestarsi in tutta la sua problematicità la mancanza di uno schema di quantizzazione Lorentz-covariante a vista.

Appendice A

Algebra delle matrici gamma in dieci dimensioni

Adottiamo la rappresentazione di Majorana–Weyl per le matrici di Dirac γ^a[1]

$$\begin{aligned}(\Gamma^a)_{\alpha\beta} &= (\gamma^a)_\alpha{}^{\underline{\varepsilon}} C_{\underline{\varepsilon}\beta} \\ (\Gamma^a)^{\alpha\beta} &= C^{\alpha\underline{\varepsilon}} (\gamma^a)_{\underline{\varepsilon}}{}^\alpha,\end{aligned} \tag{A.1}$$

dove C è la matrice (antisimmetrica e idempotente) di coniugazione di carica, caratterizzata dall'algebra di Weyl

$$(\Gamma^a)_{\alpha\beta}(\Gamma^b)^{\beta\gamma} + (\Gamma^b)_{\alpha\beta}(\Gamma^a)^{\beta\gamma} = 2\eta^{ab}\delta_\alpha{}^\gamma \tag{A.2}$$

(qui η^{ab} è la metrica diecidimensionale con segnatura -8). Definiamo i prodotti antisimmetrici

$$\Gamma^{a_1\cdots a_k} = \Gamma^{[a_1}\cdots\Gamma^{a_k]} \tag{A.3}$$

che sono soggetti alla proprietà di dualità

$$\Gamma^{a_1\cdots a_k} = \pm(-1)^{\frac{k}{2}(k+1)}\frac{1}{(D-k)!}\varepsilon^{a_1\cdots a_D}\Gamma_{a_{k+1}\cdots a_D} \tag{A.4}$$

dove si ha il segno mendalign quando la prima matrice ha indici spinoriali bassi, ed il segno più nell'altro caso. Caratteristica delle dieci dimensioni è l'identità ciclica

$$(\Gamma^g)_{(\alpha\beta}(\Gamma_g)_{\gamma)\delta} = 0 \tag{A.5}$$

che implica l'identità "duale"

$$(\Gamma^g)_{(\alpha\beta}(\Gamma_g{}^{a_1\cdots a_4})_{\gamma\delta)} = 0. \tag{A.6}$$

[1] L'indice $\underline{\varepsilon}$ corre sulle 32 componenti degli spinori di Dirac, mentre gli altri indici stanno nella rappresentazione irriducibile chirale 16 (indici in basso) o $\overline{16}$ (indici più alti) di $SO(10)$.

Appendice B

Calcolo esplicito del grafico anomalo con due campi esterni di gauge

L'anomalia del secondo grafico di Fig. 4.1, usando il vertice anomalo (4.8), è data da

$$A_{2ij}^{HIJ}(p,q) = i\alpha \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \,\mathrm{tr}\left(\left(i\hat{\not{k}}\gamma^3 T^H \right) \frac{i}{\not{k}} \left(\gamma_j \frac{1+\gamma_3}{2} T^J \right) \frac{i}{\not{k}-\not{q}} \left(\gamma_i \frac{1+\gamma_3}{2} T^I \right) \frac{i}{\not{k}-\not{p}-\not{q}} \right); \tag{B.1}$$

poiché ci serve questo integrale solo nel limite $\epsilon \to 0$, grazie alla presenza del momento cappucciato $\hat{\not{k}}$ di ordine ϵ possiamo annullare i momenti esterni ed estrarre il polo in $\frac{1}{\epsilon}$ prodotto dall'integrazione logaritmicamente divergente su k

$$\begin{aligned} A_{2ij}^{HIJ}(p,q) &= -\alpha \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_m k_n k_r k_s}{(k^2)^3} \,\mathrm{tr}\left(T^H T^J T^I\right) \mathrm{tr}\left(\hat{\gamma}_m \gamma_3 \gamma_n \gamma_j \frac{1+\gamma_3}{2} \gamma_r \gamma_i \frac{1+\gamma_3}{2} \gamma_s \right) \\ &\equiv \int \frac{d^D k}{(k^2)^3} J_{ij}^{HIJ}(k^3, \hat{k}). \end{aligned} \tag{B.2}$$

Notiamo che gli indici i, j, essendo esterni, sono implicitamente barrati; l'indice r è risulta implicitamente barrato poiché è vincolato da due proiettori chirali: $\frac{1+\gamma_3}{2}\gamma_r\frac{1-\gamma_3}{2} = \frac{1+\gamma_3}{2}\bar{\gamma}_r\frac{1-\gamma_3}{2}$. Con queste semplificazioni, possiamo riscrivere la traccia di matrici gamma come

$$\mathrm{tr}\left(\bar{\gamma}_r \gamma_s \gamma_3 \hat{\gamma}_m \gamma_n \left(\frac{1-\gamma_3}{2} \gamma_i \gamma_j \right) \right);$$

possiamo ora usare il fatto che l'integrale in k può solo produrre contrazioni simmetrizzate negli indici m, n, r, s. Ma poiché $\eta_{\bar{i}\hat{j}} = 0$ l'unica possibilità è

$$\begin{aligned}
&(\eta_{rs}\eta_{mn} + \eta_{rn}\eta_{ms}) \operatorname{tr}\left(\bar{\gamma}_r\gamma_s\gamma_3\hat{\gamma}_m\gamma_n\left(\frac{1-\gamma_3}{2}\gamma_i\gamma_j\right)\right) \\
&= \operatorname{tr}\left[(\bar{\gamma}_r\bar{\gamma}^r\gamma_3\hat{\gamma}_m\hat{\gamma}^m + \bar{\gamma}_r\hat{\gamma}_m\gamma_3\hat{\gamma}^m\bar{\gamma}^r)\left(\frac{1-\gamma_3}{2}\gamma_i\gamma_j\right)\right]
\end{aligned}$$

che si annulla usando le proprietà di commutazione della matrice γ_3 con $\hat{\gamma}_m$ e $\bar{\gamma}_r$.

Bibliografia

[1] J. Honerkamp, *Nucl. Phys.* **B48** (1972) 269

[2] J. Honerkamp, *Nucl. Phys.* **B36** (1972) 130

[3] L.F. Abbott, Letture date alla 21esima *Scuola di Cracovia di Fisica Teorica*, Cracovia, Polonia, 22 Maggio - 9 Giugno 1981, *Acta Physica Polonica* **B13** (1982) 33

[4] G.'t Hooft, Rendiconti della *XII Scuola Invernale di Fisica Teorica nei Carpazi*, *Acta Universitatis Wratislaviensis* No. 368, Vol. 1, Wroclaw 1976

[5] I. Batalin e G. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **102B** (1981), 27

[6] I. Batalin e G. Vilkovisky, *Phys. Rev.* **D28** (1983), 2567

[7] I.A. Batalin e E.S. Fradkin, *Phys. Lett.* **122B** (1983), 157

[8] D. J. Gross e E. Witten, *Nucl. Phys.* **B277** (1981) 1; D. J. Gross e J.H. Sloan, *Nucl. Phys.* **B291** (1987) 41

[9] R. Kallosh, *Phys. Lett.* **225B** (1989), 49; M.B. Green e C. Hull, *Phys. Lett.* **229B** (1989), 215

[10] B.E.W. Nilsson, *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 176

[11] M. Tonin, *Int. J. Mod. Phys.* **A4** (1989) 1983

[12] M. Tonin, *Int. J. Mod. Phys.* **A6** (1991) 315

[13] M. Tonin, *Nucl. Phys.* **29B,C** (1992) 137

[14] G.'t Hooft, *Nucl. Phys.* **B61** (1973) 455

[15] S. Carlip, *Nucl. Phys.* **B284** (1987) 365

[16] A.H. Diaz e F. Toppan, *Phys. Lett.* **211B** (1988) 285

[17] M. T. Grisaru, H. Nishino e D. Zanon, *Nucl. Phys.* **B314** (1989) 363

[18] M. T. Grisaru e D. Zanon, *Nucl. Phys.* **B310** (1988) 57

[19] S. Mukhi, *Nucl. Phys.* **B264** (1986) 640

[20] J. Atick e A. Dhar, *Nucl. Phys.* **B284** (1987) 131

[21] D. Karabali, H. J. Schnitzer e K. Tsokos, *Nucl. Phys.* **B294** (1987) 412; U. Ellwanger, J. Fuchs e M. G. Schmidt, *Nucl. Phys* **B314** (1989) 175

[22] A. Shapiro e C. C. Taylor, *Phys. Lett.* **181B** (1986) 67; **186B** (1987) 69

[23] N. Dragon, *Z. Phys.* **C2** (1979) 29

[24] P.E. Haagensen, *Mod. Phys. Lett.* **A6** (1991) 431

[25] P. B. Wiegmann, *Nucl. Phys.* **B323** (1989) 330

[26] M. Porrati e P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **273B** (1991) 47

[27] M. T. Grisaru, A. E. M. Van de Ven e D. Zanon, *Phys. Lett.* **173B** (1986) 423; *Nucl. Phys.* **B277** (1986) 388, 409

[28] R. Kallosh, *Phys. Lett.* **195B** (1987) 369; S. Carlip, *Nucl. Phys.* **B284** (1987) 365

[29] B. de Wit, M. T. Grisaru e P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B408** (1993) 299

[30] M. Raciti, F. Riva e D. Zanon, *Phys. Lett.* **B227** (1989) 118

[31] A. Fradkin e E. Tseytlin, *Phys. Lett.* **158B** (1985) 316; C. G. Callan, D. Friedan, E. J. Martinec e M. S. Perry, *Nucl. Phys* **B262** (1985) 593; A. Sen, *Phys. Lett.* **166B** (1986) 300

[32] A. Candiello e K. Lechner, *Nucl. Phys.* **B412** (1994) 479

[33] A. Candiello, K. Lechner e M. Tonin, *Padova preprint* DFPD/94/TH/43

[34] K. Lechner, *comunicazione personale*

[35] L. Bonora, P. Pasti e M. Tonin, *Nucl. Phys.* **B286** (1987) 150

[36] L. Bonora, P. Pasti e M. Tonin, *Phys. Lett.* **188B** (1987) 335

[37] L. Bonora, M. Bregola, K. Lechner, P. Pasti e M. Tonin, *Int. J. Mod. Phys.* **A5** (1990) 461;

[38] R. D'Auria e P. Fré, *Phys. Lett.* **200B** (1988) 63; R. D'Auria, P. Fré, M. Raciti e F. Riva *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988) 953; L. Castellani, R. D'Auria e P. Fré, *Phys. Lett.* **196B** (1987) 349; L. Bonora, M. Bregola, K. Lechner, P. Pasti e M. Tonin, *Nucl. Phys.* **B296** (1988) 877

[39] N. Berkovits, *Phys. Lett.* **304B** (1993) 249

[40] M. Green e J. Schwarz, *Phys. Lett.* **149B** (1984) 117

[41] S. Carlip, *Nucl. Phys.* **B284** (1987) 365

[42] M. Green e J. Schwarz, *Phys. Lett.* **136B** (1984) 367; *Nucl. Phys.* **B243** (1984) 285

[43] M. B. Green, J. H. Schwarz e E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1987)

[44] J. J. Atick, A. Dhar e B. Ratra, *Phys. Lett.* **169B** (1986) 54; A. Dhar, *Superstrings and Geometry of Superspace*, seminario tenuto alla *Scuola Invernale di Fisica Teorica del Tata Institute*, India, Maggio 1986

[45] M. Grisaru, P. Howe, L. Mezincescu, B. Nilsson e P. Townsend, *Phys. Lett.* **162B** (1985) 116; E. Witten, *Nucl. Phys.* **B266** (1986) 245

[46] S. Aoyama e M. Tonin, *Nucl. Phys.* **B179** (1981) 293

[47] B.E.W. Nilsson e A.K. Tollstein, *Phys. Lett.* **169B** (1986) 369; **171B** (1986) 212; R.E. Kallosh e B.E.W. Nilsson, *Phys. Lett.* **167B** (1986) 46

[48] S. Mc Dowell e M. Rakowski, *Nucl. Phys.* **B274** (1986) 589

[49] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B266** (1986) 245

[50] M. Takao, *Prog. Theor. Phys.* **77** (1987) 168

[51] S. Ferrara, P. Freé e M. Porrati, *Ann. Phys.* **175** (1987) 112

[52] S.J. Gates e H. Nishino, *Phys. Lett.* **157B** (1985) 157; **173B** (1986) 46; *Nucl. Phys.* **B278** (1986) 353

[53] K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 2911

[54] J. J. Atick, A. Dhar e B. Ratra, *Phys. Rev.* **D33** (1986) 2824

[55] G. F. Chapline e N. S. Manton, *Phys. Lett.* **120B** (1983) 105

[56] A. Chamseddine, *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 403

[57] E. Bergshoeff, M. de Roo e P. van Nievenhuizen, *Nucl. Phys.* **B195** (1982) 97

[58] B.E.W. Nilsson, *Göteborg preprint* (1981) 6; *Class. Quant. Grav* **3** (1986) L41

[59] P. Breitenlohner e D. Maison, *Commun. Math. Phys.* **52** (1977) 11, 39, 55

[60] W. Siegel, *Phys. Lett.* **128B** (1083) 397

[61] P.S. Howe, H. Nicolai e A. van Proeyen *Phys. Lett.* **122B** (1982) 446

[62] G.'t Hooft e M. Veltman, *Nucl. Phys.*, **B44** (1972) 189

[63] C. Bollini e J. Gianbiagi, *Il Nuovo Cimento* **12A** (1972) 20; *Acta Phys. Austr.* **38** (1973) 211